CUPRINS:

1. INTRODUCERE

1.1. Originea şi scopul geometriei descriptive

Nevoia de a reprezenta, obiectele din spaţiu prin desene este pentru om o necesitate comparabilă cu aceea de a exprima graiul prin scris. După cum a inventat scrisul pentru a fixa ceea ce vorbeşte, omul a imaginat desenul pentru a exprima ceea ce vede. Acest îndemn natural a dat naştere diverselor sisteme convenţionale de reprezentare imaginate de-a lungul secolelor, conform cărora, orice obiect din spaţiu este reprezentat printr-o imagine plană construită după anumite reguli, numită desen. Din toate sistemele imaginate, au rămas azi în uz doar cele consacrate de practică, mai ales în arhitectură şi construcţii.

Problema este de a desena, pe o foaie de hârtie, deci pe o suprafaţă plană cu numai două dimensiuni, un obiect din spaţiu având trei dimensiuni. Metoda de rezolvare a acestei probleme este cea geometrică; ea constă în utilizarea regulilor geometriei care stabilesc legătura dintre obiectul din spaţiu şi imaginea lui pe hârtie. Aceste reguli trebuie cunoscute atât de cel care alcătuieşte desenul cât şi de cel care îl citeşte. Astfel, pentru a putea proiecta o clădire şi a construi apoi clădirea după proiect, regulile de reprezentare trebuie cunoscute atât de proiectant cât şi de executant.

Deprinderea de a reprezenta corpurile din spaţiu prin imagini plane şi respectiv de a imagina corpurile în spaţiu prin simpla citire a desenelor, duce la rezolvarea aşa-numitei „vederi în spaţiu", însuşire de primă importanţă pentru inginerul constructor sau arhitect.

1.2. Scurt istoric

Problema reprezentării corpurilor pe un plan a fost una din preocupările omului încă din cele mai vechi timpuri. Ea a apărut, sub diferite forme, în două domenii: în artă, îndeosebi în pictură şi în tehnică, mai ales în proiectarea clădirilor.

Grecii şi romanii alcătuiesc decoruri scenice care dau spectatorului iluzia realităţii, ce se vor numi apoi perspective. Arhitectul roman **Vitruvius** (sec.I) utilizează în tratatul său „De arhitectura" reprezentarea clădirilor prin două vederi care corespund cu ceea ce numim astăzi „planul" şi „elevaţia". Necesitatea de a tăia cu exactitate blocurile de piatră pentru monumente după anumite forme geometrice, a dus în Evul Mediu la planurile de tăiere a pietrelor, adică „epurele de stereotomie".

În timpul Renaşterii, perspectiva cunoaşte o largă dezvoltare atât în domeniul picturii cât şi în cel al arhitecturii. Ea intră apoi în preocuparea geometrilor şi evoluează spre o doctrină de investigaţie pur geometrică.

Sfârşitul secolului al XVIII-lea (1798) aduce apariţia tratatului de geometrie descriptivă al savantului revoluţionar francez Gaspard Monge. Acesta adună, analizează şi sistematizează materialul existent şi elaborează, având în vedere nevoile reprezentărilor tehnice, sistemul dublei proiecţii ortogonale. Începând cu această dată, geometria descriptivă devine o disciplină care se răspândeşte încetul cu încetul în toate şcolile tehnice din Europa.

În ţara noastră, geometria descriptivă este introdusă în şcolile inginereşti în anul 1812 de către Gh. Asachi la Iaşi şi în 1818 de Gh. Lazăr la Bucureşti. Prima geometrie descriptivă în limba română apare în 1851 şi este o traducere din limba franceză făcută de Alex. Orăscu. Printre profesorii care şi-au legat numele de această disciplină se amintesc: A. Costenescu, M. Gapuţineanu, N. Ureche, E. Pangrati, Gh. Nichifor, A.Tănăsescu, etc.

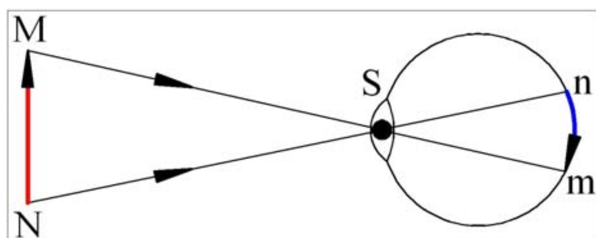
Geometria descriptivă astăzi, trăieşte legată de domeniile tehnice care i-au dat naştere şi are drept scop expunerea sistemelor de reprezentare consacrate de practică, în

spirit geometric şi pe o bază ştiinţifică bine fundamentată. Alături de alte discipline teoretice, ea are menirea să formeze gândirea tehnicianului, arhitect şi constructor.

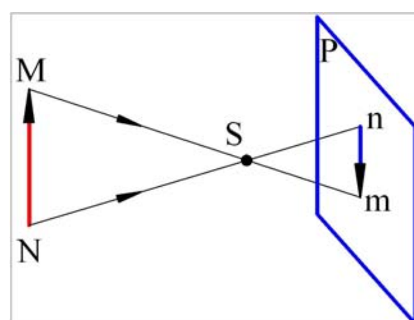
1.3. Sisteme de proiecţie

Definiţii. Sistemele de reprezentare utilizează metoda proiecţiilor, care îşi are inspiraţia în mecanismul vederii monoculare a omului. Conform acestuia, razele care pornesc din punctele luminoase ale obiectului **MN,** trec prin lentila convergentă a cristalinului şi formează imaginea **mn** pe fundul ochiului, pe membrana sensibilă a retinei (figura 1.1,a).

În mod convenţional, sistemul poate fi redus la o schemă geometrică simplă (figura 1.1,b), dacă se înlocuieşte lentila cristalinului cu un punct fix, ***S, numit centru de proiecţie***, sau punct de vedere, pentru a păstra legătura cu ochiul omenesc, iar membrana sensibilă a retinei cu un ecran ***plan P, numit plan de proiecţie***. În acest sistem ***razele luminoase devin proiectantele obiectului, iar imaginea obţinută pe ecranul plan, proiecţia obiectului***.



a)



b)

Fig. 1.1. Mecanismul vederii (a) şi schema lui (b).

Poziţia relativă a planului de proiecţie faţă de obiect şi centrul de proiecţie poate fi oarecare. Dacă se pune obiectul între planul de proiecţie şi punctul de vedere (figura 1.2), apare clar originea cuvântului „a proiecta": toate punctele obiectului sunt aruncate înainte de-a lungul proiectantelor, până pe ecranul plan unde formează imaginea.

A proiecta un corp pe un plan oarecare înseamnă a duce, dintr-un centru de proiecţie dat, raze proiectante prin punctele caracteristice ale corpului şi a determina apoi punctele în care aceste proiectante intersectează planul dat.

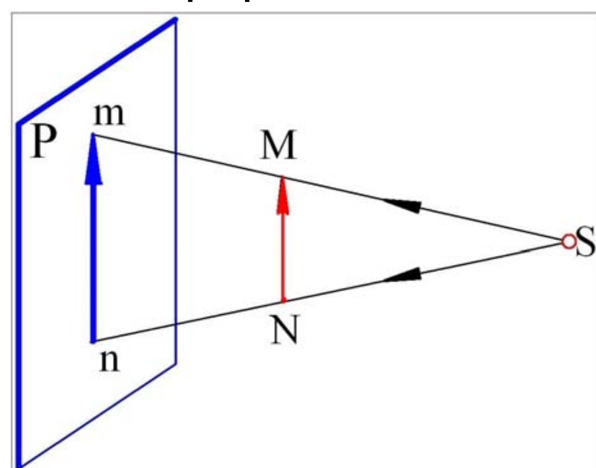


Fig.1.2.Proiectarea segmentului MN.

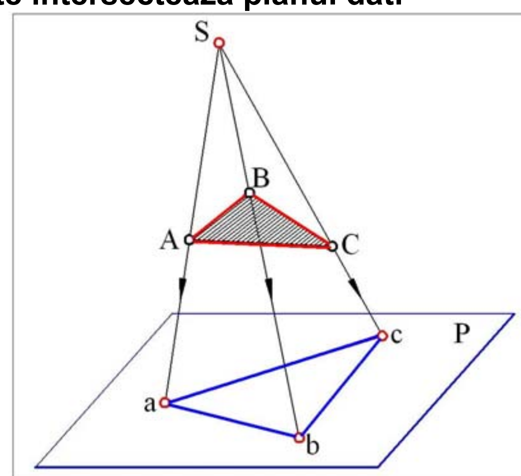


Fig.1.3.Proiectarea triunghiului ABC.

Astfel, fie un triunghi opac ***ABC,*** punctul ***S*** este centrul de proiecţie, iar planul ***P,*** planul de proiecţie (figura 1.3). Dacă din centrul ales ***S*** se duc proiectantele ***SA, SB*** şi ***SC*** prin vârfurile triunghiului, se determină la intersecţia acestora cu planul dat ***P,*** punctele ***a,***

b şi ***c,*** proiecțiile punctelor ***A, B*** şi ***C.*** Triunghiul ***abc*** reprezintă proiecția din centrul ***S***, a triunghiului din spațiu ***ABC***, pe planul de proiecție ***P.***
Dacă pozițiile triunghiului-obiect ***ABC*** şi a planului de proiecție ***P*** rămân neschimbate, se vede că imaginea-proiecție ***abc*** depinde de poziția centrului de proiecție ***S***.

Dacă centrul ***S*** se deplasează pe o dreaptă oarecare ***D*** (figura 1.4) în pozițiile ***S1, S2***, ..., proiecțiile triunghiului ***ABC*** devin respectiv ***a1,b1,c1, a2,b2,c2,...***

Dacă centrul de proiecție este la distanță finită față de planul de proiecție (pozițiile *S1* şi *S2*), proiectantele apar concurente în centrul de proiecție iar *proiecția se numeşte conică sau centrală.*

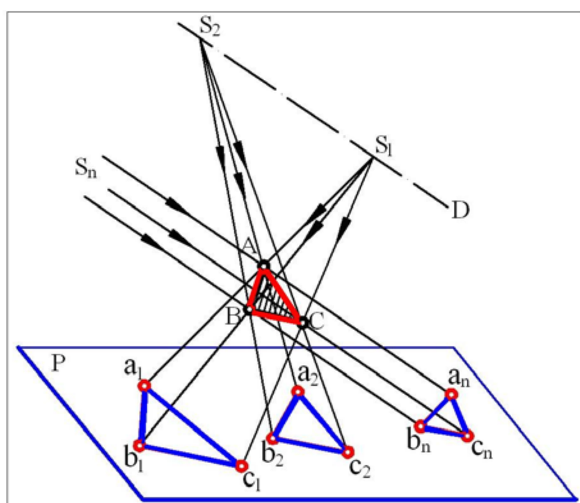


Fig.1.4. Proiecții centrale(S1, S2) şi proiecție paralelă(Sn);

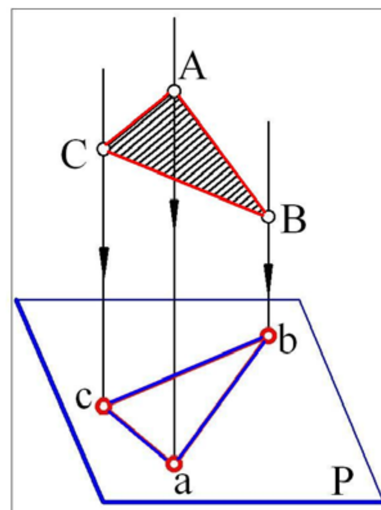


Fig.1.5. Proiecție paralelă, ortogonală.

Dacă centrul de proiecție este la infinit (*Sn*), proiectantele apar paralele cu dreapta *D*, numită direcție de proiecție şi *proiecția devine cilindrică sau paralelă.*

Proiecția cilindrică sau paralelă poate fi oblică când direcția de proiecție este înclinată față de planul de proiecție (figura 1.4), ***sau ortogonală*** pentru o direcție de proiecție perpendiculară pe planul de proiecție (figura 1.5). În sistemele de reprezentare a clădirilor se utilizează atât proiecția centrală, cât şi cea paralelă, mai ales cea ortogonală.

Deoarece, mecanismul vederii omului se bazează pe proiecția centrală, ori de câte ori se urmăreşte să se redea obiectul care trebuie reprezentat aşa cum îl vede ochiul, deci cât mai natural, se utilizează proiecția centrală. Proiecția paralelă este folosită la reprezentările care au drept scop să redea forma reală a obiectelor din spațiu, adică desene pe care să se poată face măsurători.

Obiectele din spațiu apar, în general, deformate prin proiecție. Această deformare se face însă după anumite legi geometrice specifice fiecărui sistem de proiecție.

1.4. Proprietăți geometrice ale proiecțiilor

- proiecția unui punct va fi tot un punct indiferent de sistemul de proiecție utilizat;
- dacă punctul aparține planului de proiecție, proiecția lui este tot în acel punct;
- dacă proiectanta este paralelă cu planul de proiecție, proiecția punctului va fi aruncată la infinit;
- proiecția unei drepte este de obicei, tot o dreaptă;

- urma unei drepte pe un plan de proiecție este punctul în care dreapta intersectează planul;
- proiecția conică a punctului de la infinit al dreptei se numeşte punctul de fugă al dreptei;
- un segment de dreaptă se proiectează pe un plan după un segment de lungime mai mică sau cel mult egală cu cel din spațiu;
- două drepte concurente în spațiu, au proiecțiile concurente;
- două drepte paralele în spațiu au proiecții paralele dacă se foloseşte proiecția cilindrică sau concurente dacă se utilizează proiecția conică;
- un unghi plan format de două drepte concurente în spațiu, se proiectează deformat pe un plan de proiecție;
- dacă planul format de cele două drepte este paralel cu planul de proiecție unghiul format de ele se proiectează în adevărata mărime;
- unghiul drept se proiectează ortogonal în adevărata mărime pe un plan dacă măcar o latură este paralelă cu acel plan;
- un plan oarecare se intersectează cu planul de proiecție după o dreaptă numită urma planului;
- un corp se proiectează pe un plan de proiecție după o singură proiecție care este insuficientă pentru determinarea corpului din spațiu,
- dubla şi tripla proiecție ortogonală foloseşte două respectiv trei plane de proiecție.

2. REPREZENTAREA PUNCTULUI

2.1. Proiecția dublu ortogonală

Se consideră două plane perpendiculare ***H*** şi ***V*** (figura2.1), numite ***plane de proiecție.*** Dreapta de intersecția dintre planul orizontal de proiecție ***H*** şi planul vertical de proiecție ***V*** se numeşte **linie de pământ** şi se notează cu ***Ox.***

Din intersecția planelor de proiecție rezultă patru semiplane delimitate de linia de pământ:
- semiplanul orizontal anterior, ***Ha*****;**
- semiplanul orizontal posterior, ***Hp*****;**
- semiplanul vertical superior, ***Vs*****;**
- semiplanul vertical inferior, ***Vi.***

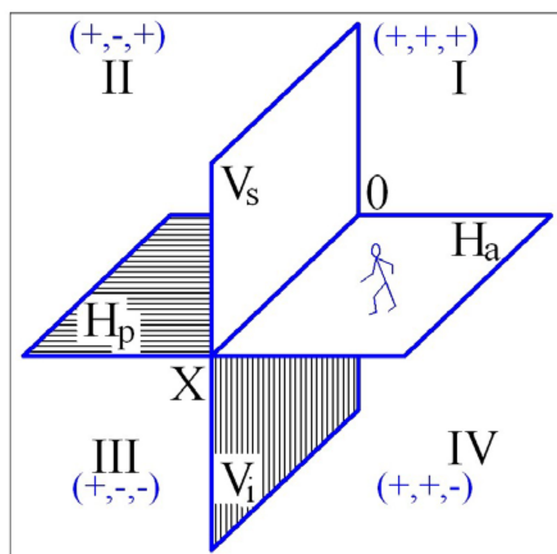


Fig.2.1. Cele patru diedre de proiecție.

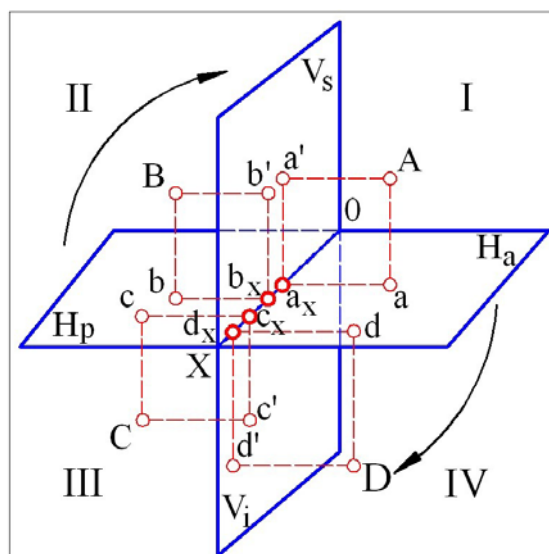


Fig. 2.2. Proiecția punctelor A, B, C, D.

Planele de proiecție *H* şi ***V*****,** împart spațiul în **patru unghiuri diedre**.
Acestea sunt:

- **diedrul I,** între semiplanele Ha şi Vi;
- **diedrul II,** între semiplanele Vs şi Hp;
- **diedrul III,** între semiplanele Hp şi Vi;
- **diedrul IV**, între semiplanele Vi şi Ha.

Fie dat ***punctul A*** din spațiu, situat în ***diedrul I*** (figura 2.2). Se proiectează punctul ***A***, ortogonal pe planele de proiecție ***H*** şi ***V****.* Planele de proiecție fiind ortogonale, proiectantele sunt, de asemenea, ortogonale.

Proiectanta verticală din ***A*** înțeapă planul orizontal de proiecție ***H*** în punctul ***a*****,** numit ***proiecția orizontală a punctului A***, iar proiectanta orizontală înțeapă planul vertical de proiecție ***V,*** în punctul ***a'***, numit ***proiecția verticală a punctului A.***

Sistemul dublu ortogonal de plane de proiecție, asociat cu proiecția ortogonală constituie sistemul de proiecție Monge.

2.2. Epura punctului

Se consideră punctul ***A*** din spațiu, în ***diedrul I*** (figura 2.2). Proiecțiile sale pe planele de proiecție sunt ***a*** şi ***a'***. Planul proiectant ***aAa'*** este perpendicular pe axa ***Ox*** şi o intersectează în punctul ***ax,*** punct ce poate fi considerat, şi ca proiecția ortogonală a punctului ***A*** din spațiu pe axa ***Ox***.

Segmentul *Oax* reprezintă abscisa punctului *A*. Cele două drepte **a_xa** şi **a_xa'** sunt perpendiculare pe linia de pământ **Ox.**

Segmentul Aa = a_xa' se numeşte cota punctului şi măsoară distanța punctului A față de planul orizontal de proiecție.

Segmentul Aa' = a_xa măsoară distanța punctului față de planul vertical de proiecție şi se numeşte depărtarea punctului.

Abscisa, cota şi depărtarea sunt coordonatele descriptive ale punctului şi definesc poziția acestuia în spațiu.

Toate punctele situate deasupra planului orizontal au cotele pozitive (proiectate pe semiplanul vertical superior), după cum toate punctele aflate în fața planului vertical au depărtările pozitive (proiectate pe semiplanul orizontal anterior).

Rotind planul H până la suprapunerea peste planul V, proiecțiile **a** şi **a'** ale punctului **A** se vor situa pe aceeaşi dreaptă, perpendiculară pe axa **Ox**, numită **linie de ordine**. Considerând şi **alte puncte B, C şi D** situate **în diedrele II, III şi IV,** ele vor avea, după suprapunerea planelor de proiecție, proiecțiile **b-b'**, **c-c'** şi respectiv **d-d'** situate pe aceeaşi linie de ordine (figura 2.3).

Rezultă astfel, **o reprezentare plană convențională a punctelor din spațiu, proiectate ortogonal pe planele de proiecție, utilizând numai linia de pământ, numită epură** (figura 2.4).

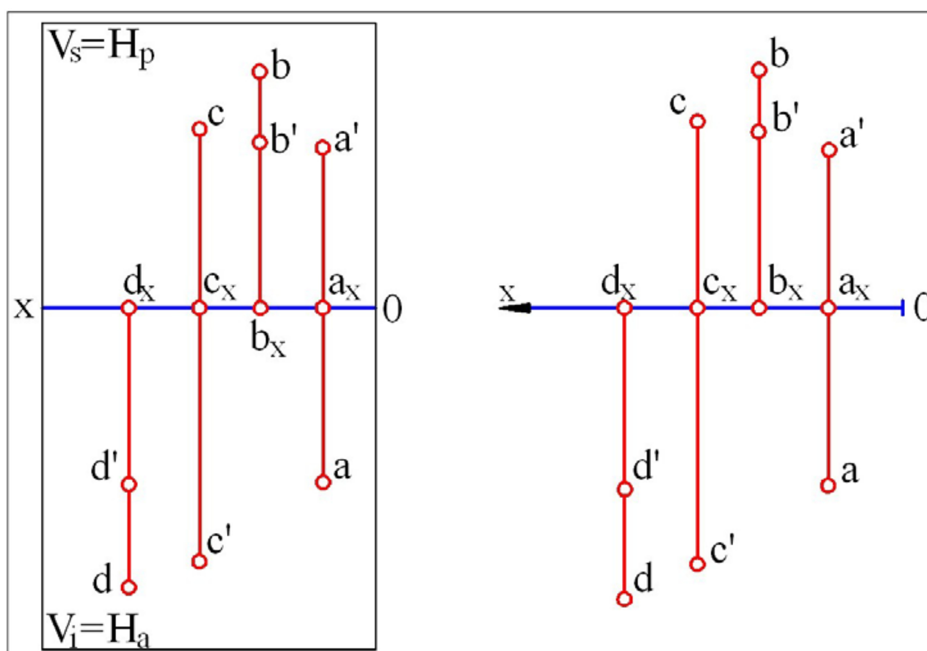


Fig. 2.3. Epura completă. *Fig.2.4. Epura simplificată.*

Se observă că pe epură, depărtările pozitive (pentru punctele din diedrele I şi IV) **se măsoară sub linia de pământ, iar cele negative** (pentru punctele din diedrele II şi III) **deasupra axei Ox.**

De asemenea, cotele pozitive (pentru punctele din diedrele I şi II) **se măsoară deasupra liniei de pământ, iar cotele negative** (pentru punctele din diedrele III şi IV), **sub axa Ox.**

Poziția punctului în spațiu, în raport cu planele de proiecție, se determină după semnul coordonatelor sale descriptive, aşa cum rezultă din tabelul 2.1.

De exemplu, punctul ***B*** având depărtarea negativă şi cota pozitivă se află în diedrul II. Punctul ***C***, cu depărtarea negativă şi cota negativă se găseşte în diedrul III, iar punctul ***D*** care are depărtarea pozitivă şi cota negativă, este situat în diedrul IV (figura 2.4).

Tabelul 2.1.

Diedrul	**I**	**II**	**III**	**IV**
Depărtarea	+	-	-	+
Cota	+	+	-	-

2.3. Plane bisectoare

Planele care împart cele patru diedre în câte două unghiuri egale se numesc plane bisectoare. Astfel, primul plan bisector trece prin diedrele I şi III, iar al doilea plan bisector prin diedrele II şi IV (figura 2.5,a). Planele bisectoare împreună cu planele de proiecție împart spațiul în **opt unghiuri octante sau octanți.**

Planele bisectoare fiind definite ca locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de planele de proiecție, rezultă că punctele situate în aceste plane **au cota egală cu depărtarea** şi de acelaşi semn, dacă punctele sunt situate în ***B I*** şi de semne contrare, daca se află în ***B II.***

Punctele ***A*** şi ***C*** conținute în primul plan bisector ***B I*** şi punctele ***B*** şi ***D*** situate în al doilea plan bisector ***B II,*** (figura 2.5,a), sunt reprezentate în epură, în figura 2.5,b.

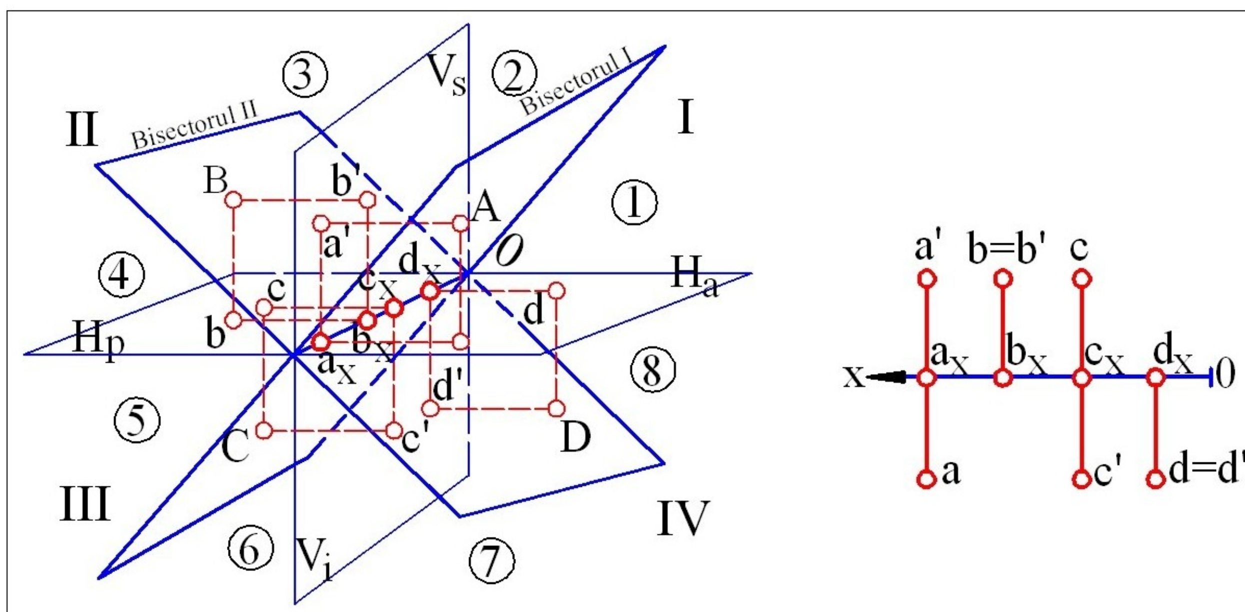


Fig.2.5. Punctele A, B, C, D aflate în planele bisectoare (a) şi reprezentate în epură (b).

2.4. Alfabetul descriptiv al punctului

Un punct oarecare din spațiu poate ocupa 17 poziții caracteristice în raport cu semiplanele de proiecție şi planele bisectoare în cei 8 octanți (fig.2.6). Astfel:
- punctul A este situat pe linia de pământ, **Ox;**
- punctul B este situat în semiplanul **Ha**;
- punctul C este situat în diedrul I, sub **[B I];**
- punctul D este situat în diedrul I, fiind conținut în **[B I];**
- punctul E este situat în diedrul I, deasupra planului **[B I]**;
- punctul F este situat în semiplanul **Vs;**
- punctul G este situat în diedrul II, deasupra planului **[B II];**
- punctul I este situat în diedrul II, fiind conținut în **[B II];**
- punctul J este situat în diedrul II, sub planul **[B II];**
- punctul K este situat în semiplanul **Hp**;
- punctul L este situat în diedrul III deasupra planului **[B I];**
- punctul M este situat în diedrul III, fiind conținut în **[B I]**;
- punctul K este situat în diedrul III sub planul **[B I];**
- punctul L este situat în semiplanul **Vi**;
- punctul R este situat în diedrul IV, sub planul **[B II];**
- punctul S este situat în diedrul IV, fiind conținut în **[B II];**
- punctul T este situat în diedrul IV, deasupra planului **[B II].**

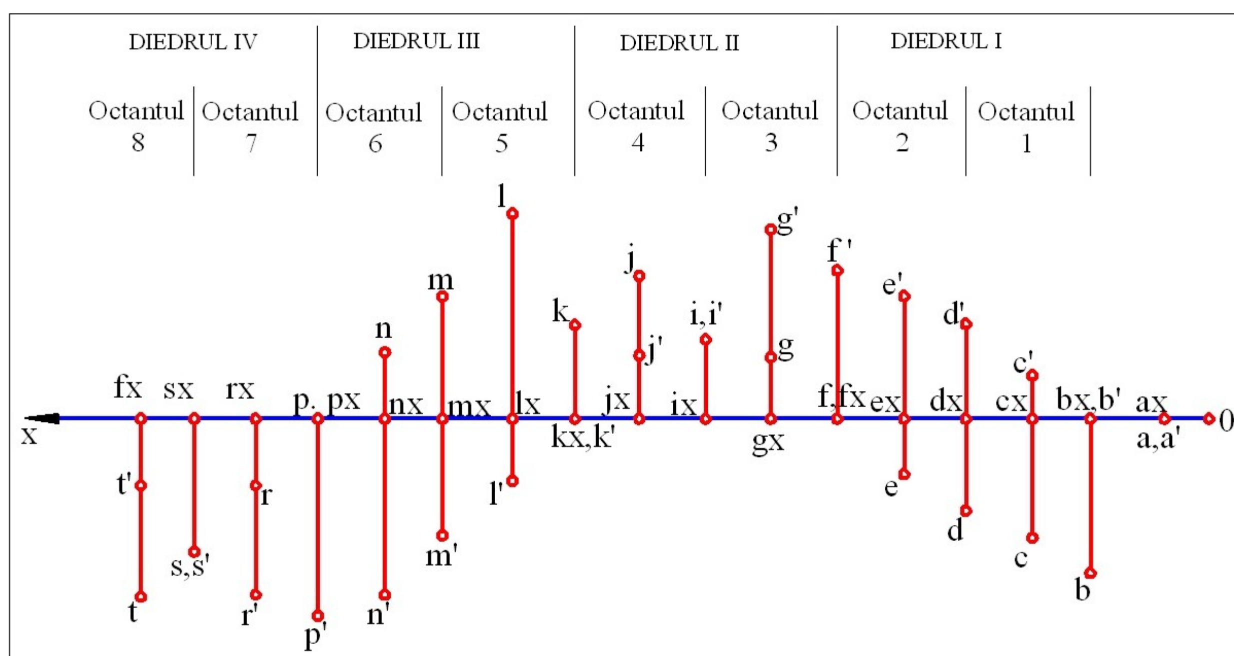


Fig.2.6. Alfabetul punctului.

Studiul pe epură al tuturor pozițiilor caracteristice ale unui punct, în raport cu planele de proiecție şi planele bisectoare, constituie alfabetul descriptiv al punctului.

2.5. Tripla proiectie ortogonală

Reprezentarea în dublă proiecție ortogonală nu redă particularitățile obiectului proiectat, fiind necesar introducerea celui de-al treilea plan de proiecție, perpendicular pe planul orizontal şi pe cel vertical, notat cu ***L*** şi numit plan lateral (figura 2.7).

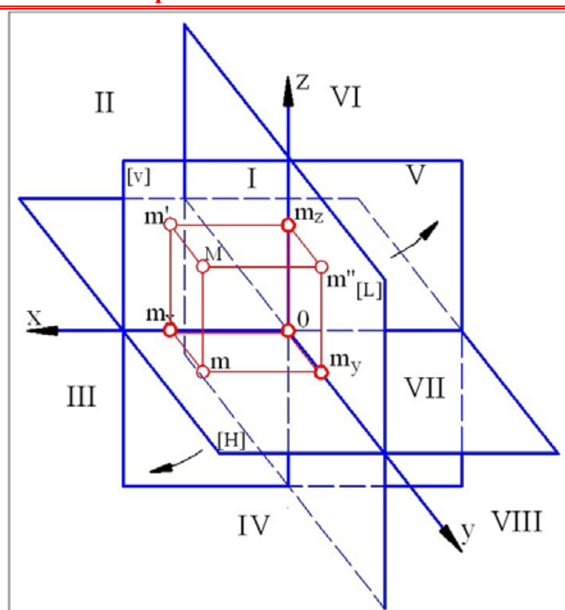


Fig.2.7. Tripla proiecție ortogonală a punctului M.

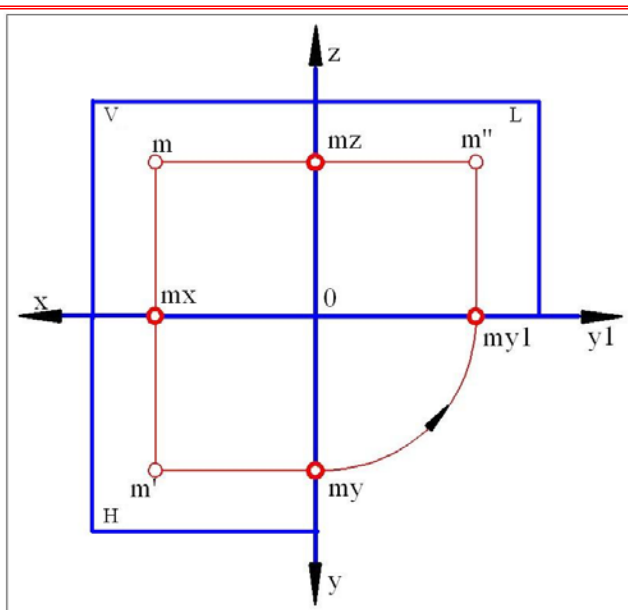


Fig.2.8. Epura pe trei plane a punctului M.

Un punct ***M*** din spațiu**,** situat în diedrul I, pe lângă proiecțiile ***m*** şi ***m'*** va avea încă o proiecție pe planul lateral ***L*** notată cu ***m"*** şi numită proiecție laterală**.**

Epura punctului ***M*** se obține prin rotirea planului orizontal în jurul axei ***Ox*** şi a planului lateral în jurul axei ***Oz***, în sens antiorar, până la suprapunerea lor peste planul vertical.
Proiecția ***m"*** descrie în rotație, un arc de cerc de rază egală cu depărtarea punctului (figura 2.8).

Prin introducerea planului lateral de proiecție ***L***, spațiul se împarte în *8 triedre***.** Reprezentarea în epură a punctelor ***A,B,C,...P, R*** situate în cele 8 triedre este prezentată în figura 2.9. iar semnele coordonatelor descriptive se văd în tabelul 2.2.

Tabelul 2.2.

TRIEDRUL	**I**	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**	**VII**	**VIII**
Abscisa **(x)**	**+**	**+**	**+**	**+**	**-**	**-**	**-**	**-**
Depărtarea **(y)**	**+**	**-**	**-**	**+**	**+**	**-**	**-**	**+**
Cota **(z)**	**+**	**+**	**-**	**-**	**+**	**+**	**-**	**-**

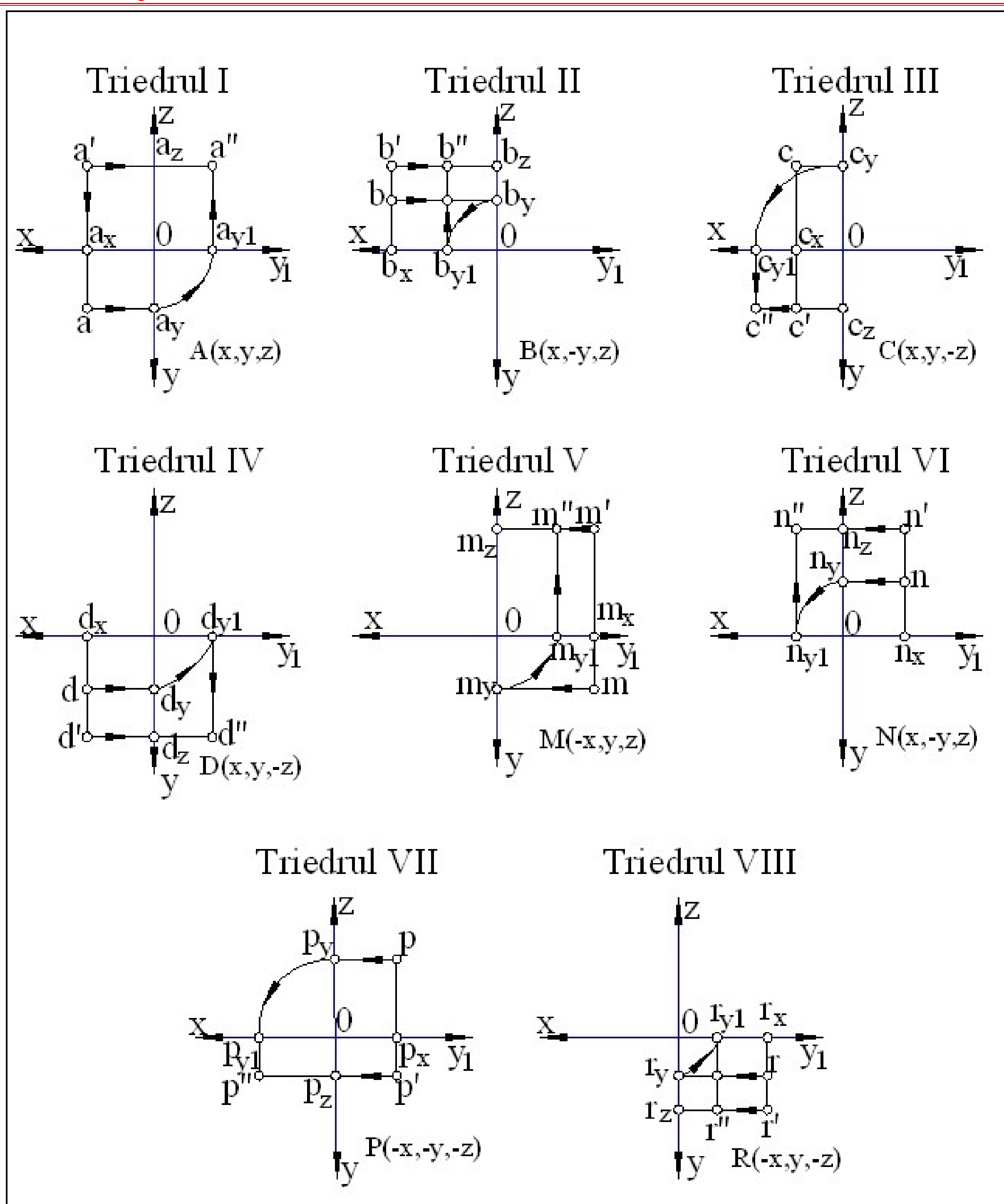


Fig.2.9. Puncte situate în triedre.

2.6. Aplicații

1) Să se reprezinte în epură punctele:

A (15; 20; - 10); B (30; - 20; - 20); C (45; 0; 15), D (55; 0; 0), [mm].

Să se arate care este poziția lor față de planele de proiecție şi planele bisectoare.

Rezolvare:

Se măsoară din origine (figura 2.10) spre stânga, pe linia pământului, abscisa Oa_x = 15 mm şi se obține a_x. Se duce prin a_x linia de ordine perpendiculară pe **Ox** şi se poartă pe aceasta: depărtarea punctului, $y = a_x a = 20$ (sub Ox, pentru că este pozitivă), iar apoi cota punctului, $z = a_x a' = -10$, (sub Ox, pentru cota negativă).

Punctul se găseşte în diedrul IV, octantul 8.

Procedând în mod analog se reprezintă şi punctul **B** în diedrul **III**, pe planul bisector **B1**, punctul **C** în semiplanul **Vs** şi punctul **D** pe linia pământului.

2) Fiind date proiecțiile m, m', n, n' şi r, r' a trei puncte M, N şi R, să se construiască proiecțiile lor laterale m", n" şi r".

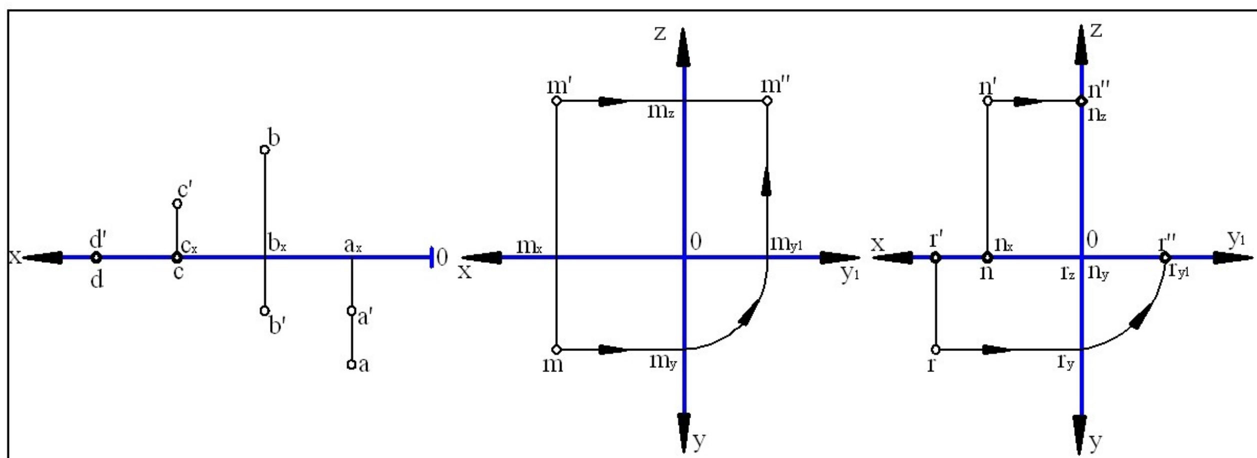


Fig. 2.10. Aplicația 1. ***Fig. 2.11. Aplicația 2.*** ***Fig. 2.12. Aplicația2.***

Rezolvare:

Se duc axele **Ox, Oy şi Oz**. Pentru a se obține **m"** (fig. 2.11) se duce linia de ordine **m'm$_z$** şi se prelungeşte dincolo de **Oz;** pe această linie se poartă depărtarea **m$_x$m** a punctului în **m$_z$m"** (grafic operația se face ducând linia **mm$_y$m$_{y1}$m"**) şi se obține în **m"** proiecția laterală căutată.

Punctul **n, n'** (fig. 2.12) fiind situat în planul vertical de proiecție, proiecția lui laterală **n"** se va găsi pe axa **Oz**, după cum punctul **r, r'** din planul orizontal de proiecție va avea proiecția laterală **r"** pe axa **Oy**. Executând construcțiile grafice indicate în figură prin săgeți, se obțin pozițiile lui **n" şi r"** pe cele două axe.

3) Cum trebuie să fie coordonatele unui punct oarecare M (m, m', m'') pentru ca punctul să fie în octantul 6 ?

Rezolvare:

Octantul 6 fiind în diedrul III, rezultă că atât depărtarea cât şi cota punctului trebuie să fie negative. Mai trebuie apoi ca ***y (depărtarea) să fie mai mic decât z (cota)****,* pentru ca punctul să fie în octantul 6.

4) Să se determine distanța față de axa Ox a punctului M având depărtarea egală cu 3 şi cota egală cu 4 [cm].

Rezolvare:

Cota şi depărtarea unui punct sunt catetele unui triunghi dreptunghic având ipotenuza drept distanța punctului fața de Ox. Deci: $d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ [cm].

5) Să se reprezinte în triedru şi epură punctele A,B,C,D situate în primele patru diedre de proiecție, şi proiecțiile lor pe cele trei plane.

Rezolvare în figura 2.13.a.b.c.d.

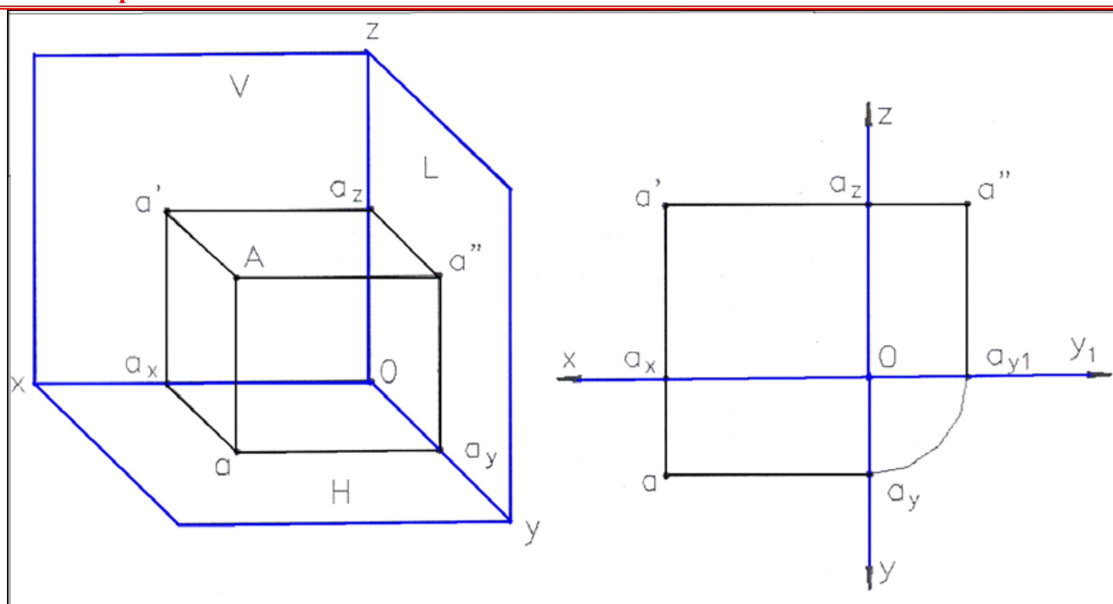


Fig. 2.13.a. Aplicația 5. Triedrul I.

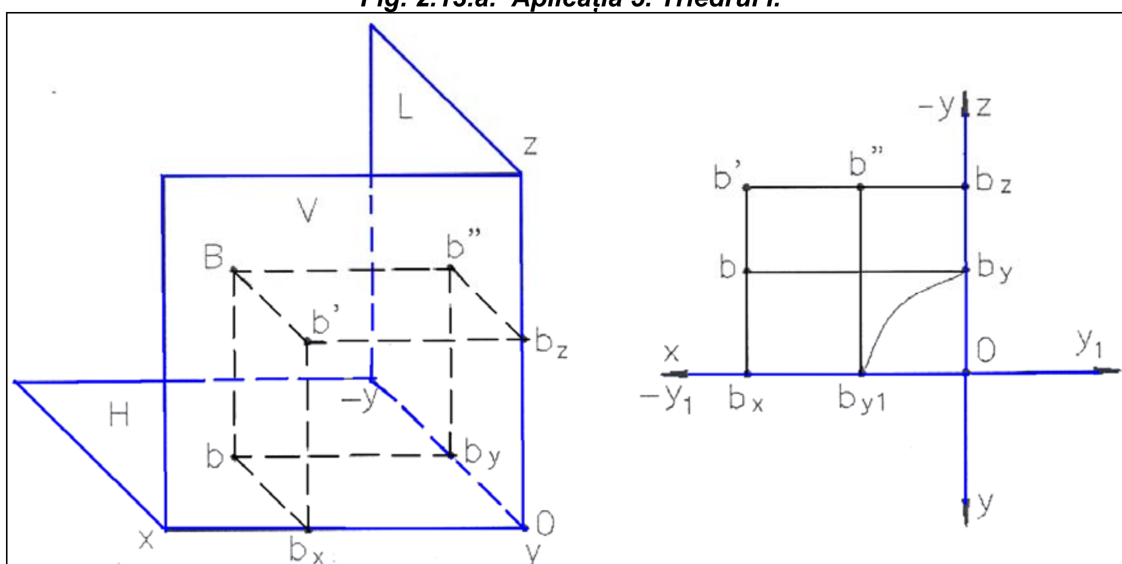


Fig. 2.13.b. Aplicația 5. Triedrul II.

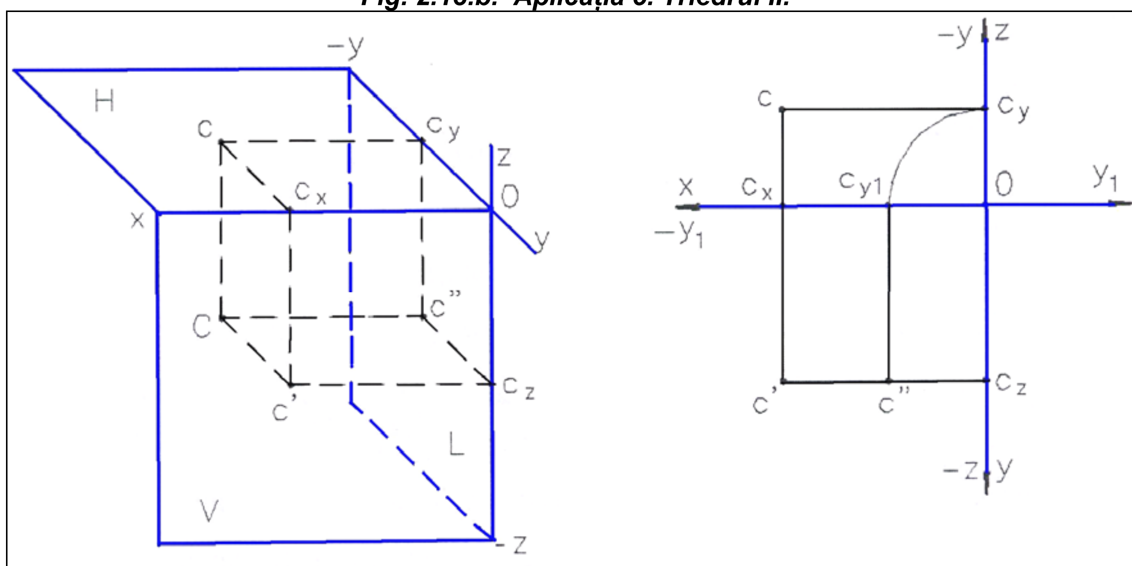


Fig. 2.13.c. Aplicația 5. Triedrul III.

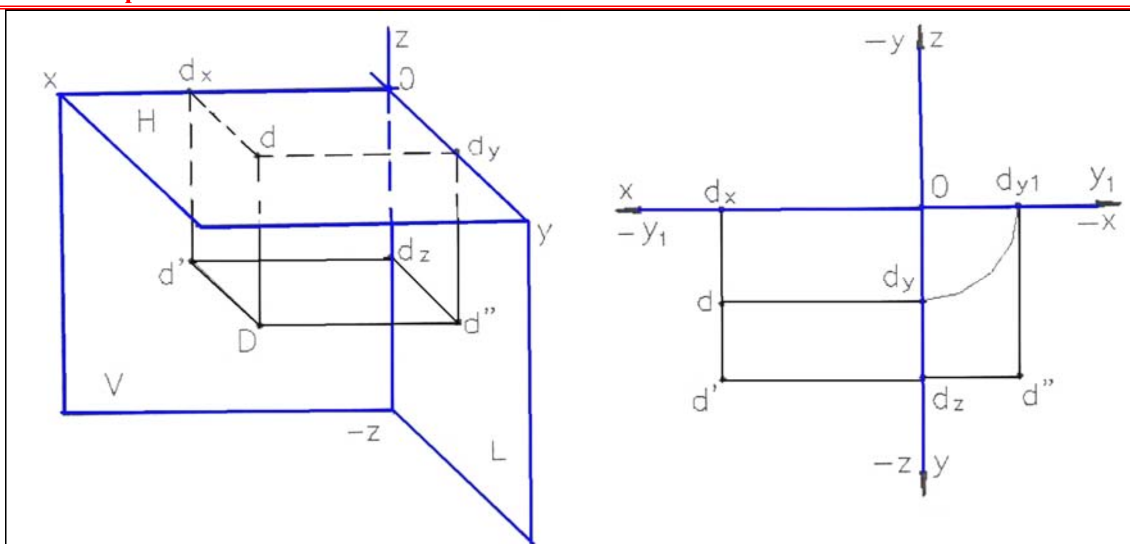


Fig. 2.13.d. Aplicația 5.Triedrul IV.

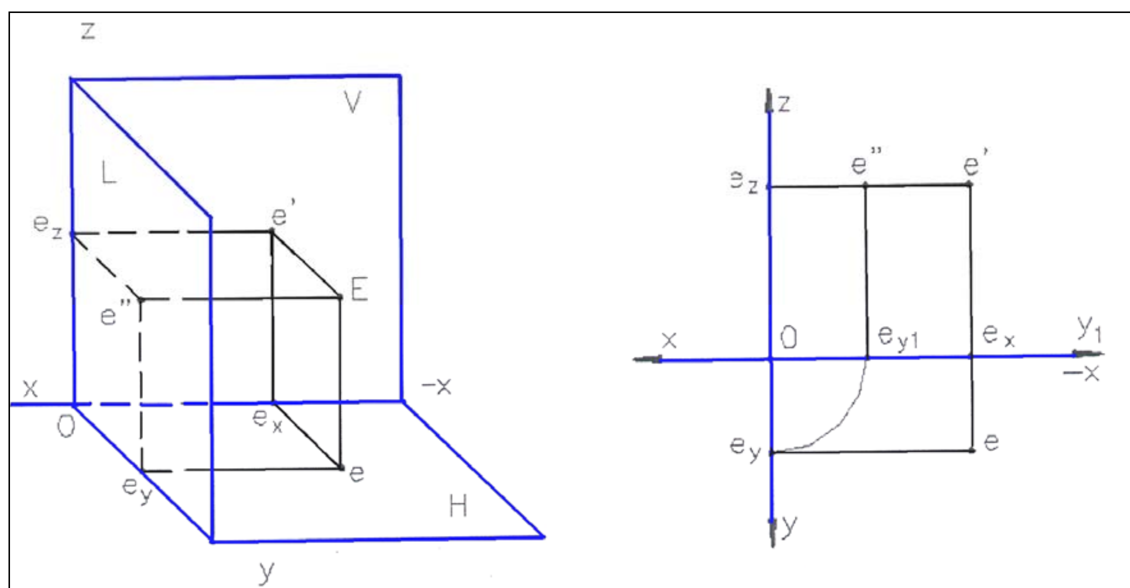


Fig. 2.14.a. Aplicația 6.Triedrul V.

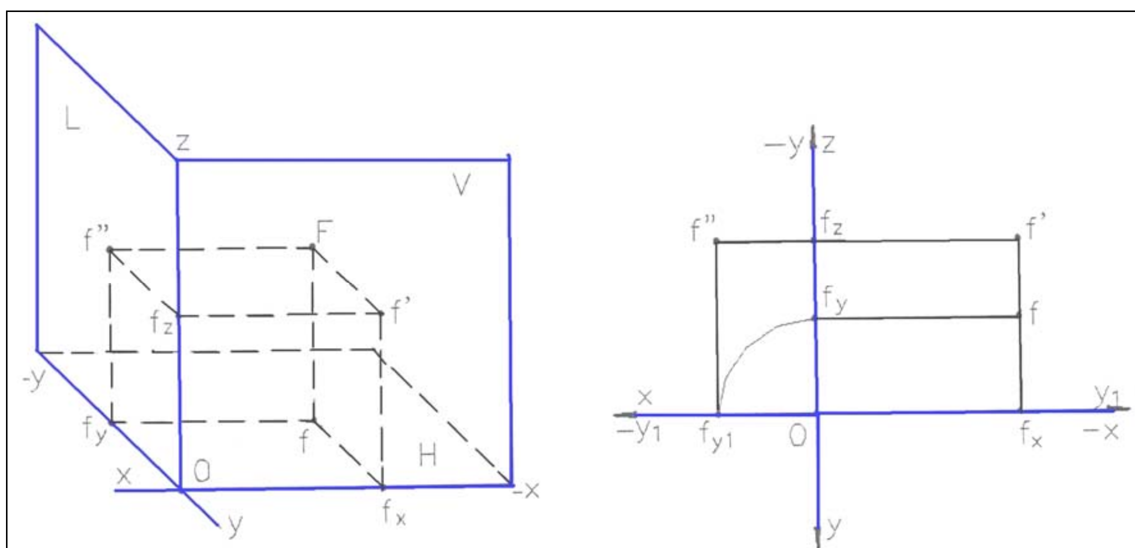


Fig. 2.14.b. Aplicația 6. Triedrul VI.

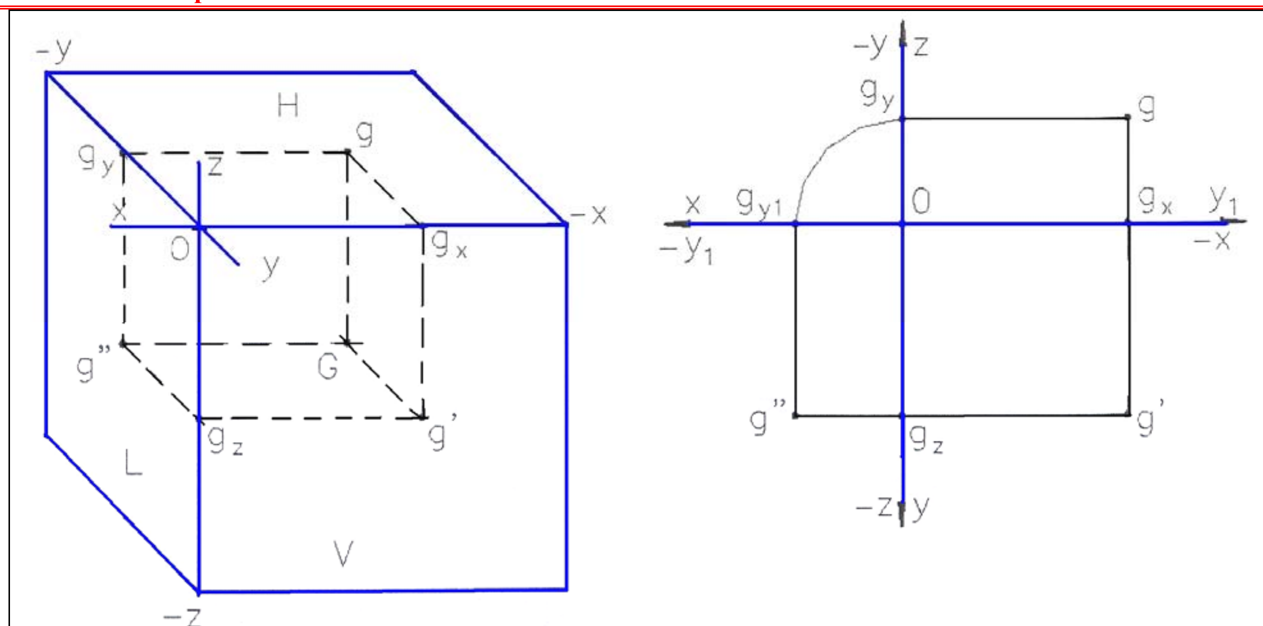


Fig. 2.14.c. Aplicația 6. Triedrul VII.

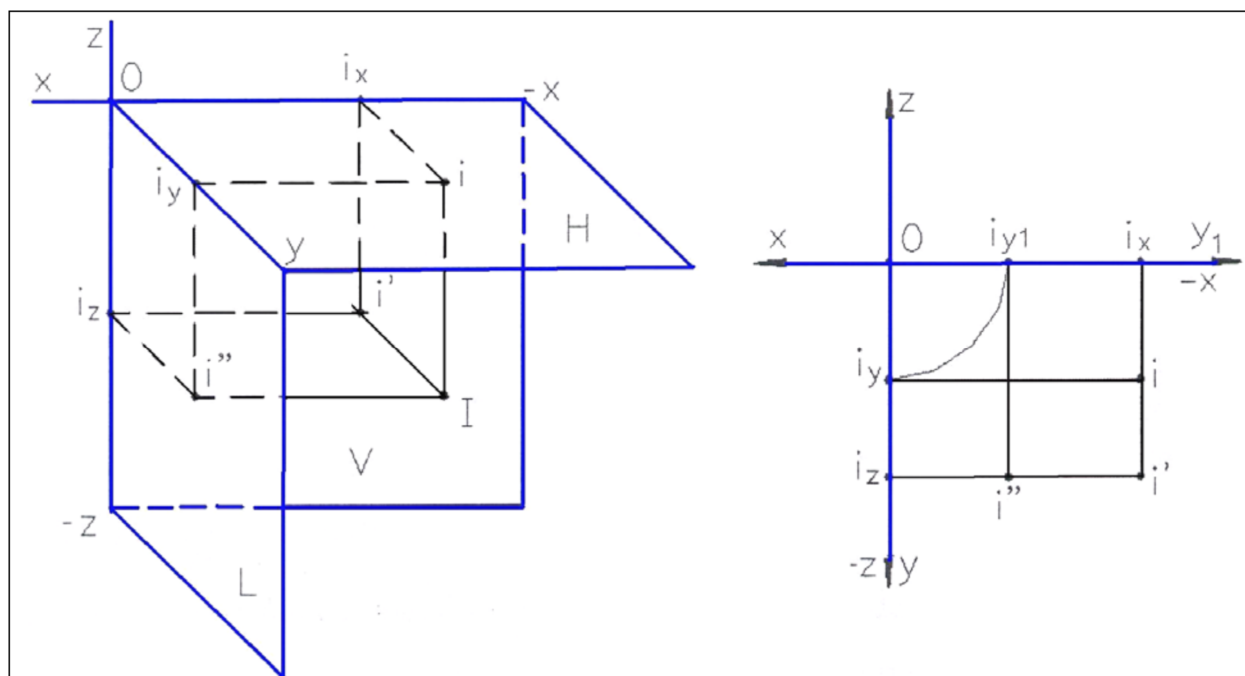


Fig. 2.14.d. Aplicația 6. Triedrul VIII.

6) Să se reprezinte în triedru şi epură punctele E,F,G,I situate în ultimele patru diedre de proiecție, şi proiecțiile lor pe cele trei plane.
Rezolvare în figura 2.14.a.b.c.d.

7) Să se reprezinte în triedru şi epură punctele M,N,P conținute în planele de proiecție, şi proiecțiile lor pe cele trei plane.
Rezolvare în figura 2.15.a.b.c.

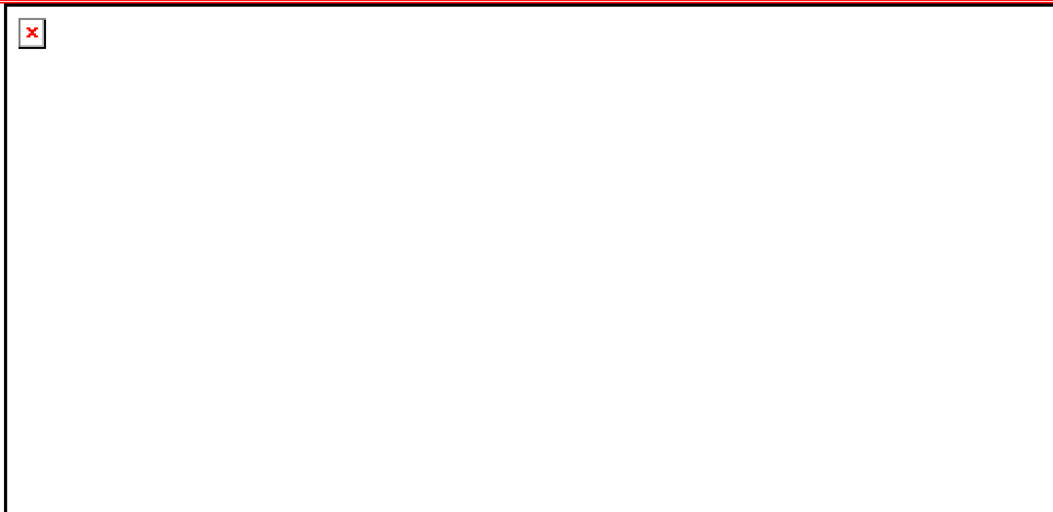


Fig. 2.15.a. Aplicația 7. Punct în H.

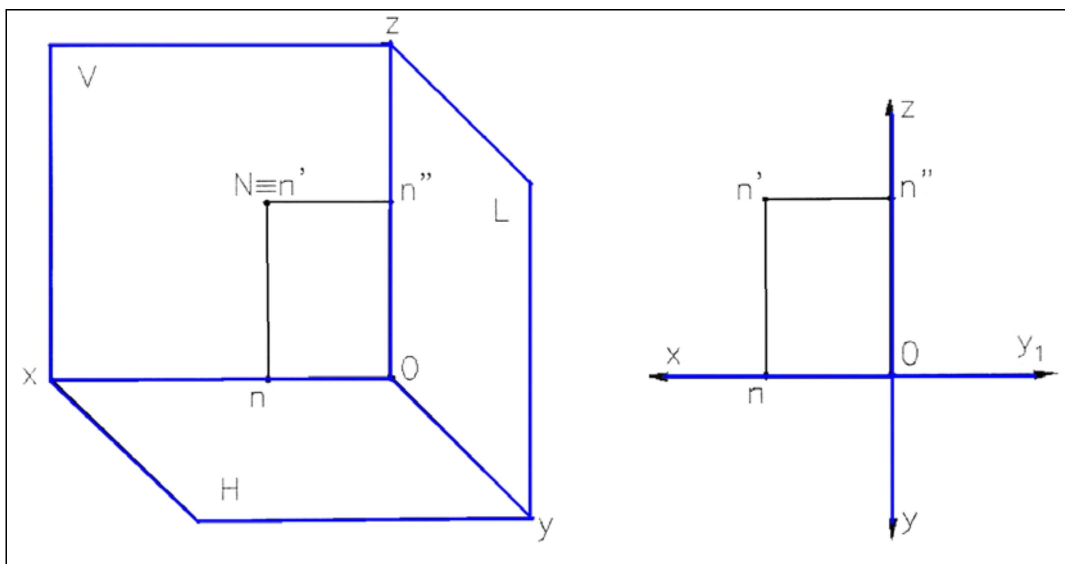


Fig. 2.15.b. Aplicația 7. Punct în V.

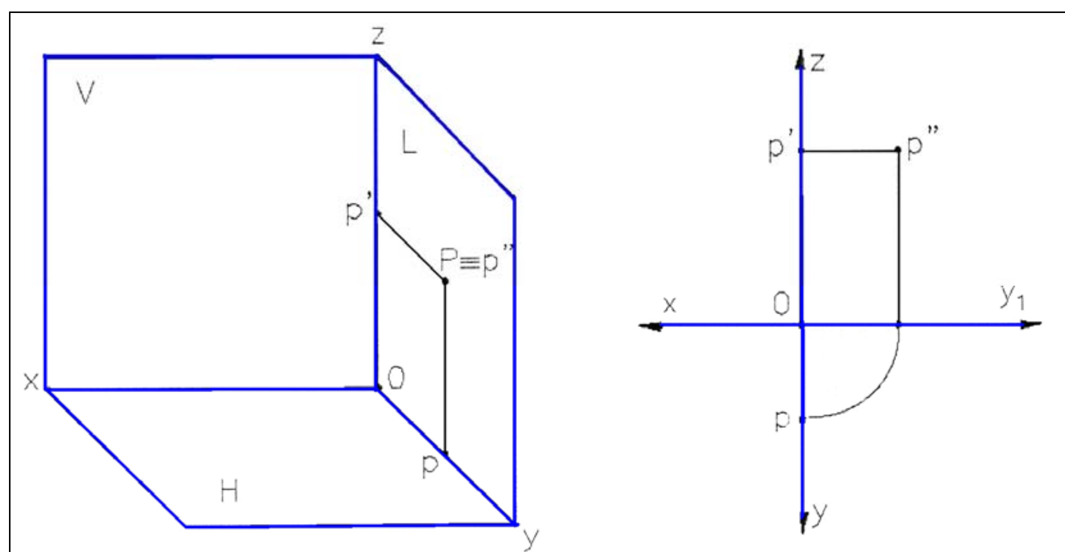


Fig. 2.15.c. Aplicația 7. Punct în L.

3. REPREZENTAREA DREPTEI

3.1. Epura şi urmele dreptei

Proiecția unei drepte pe un plan este, în general, tot o dreaptă. Pentru a reprezenta deci o dreaptă în epură, este suficient să se reprezinte două puncte ale ei.

Fie ***A*** şi ***B*** (figura 3.1.a) două puncte oarecare de pe dreapta ***D***. Proiecțiile celor două puncte, ***a*** respectiv ***b*** pe planul ***H*** şi ***a'*** respectiv ***b'*** pe planul ***V***, determină proiecțiile ***d*** şi ***d'*** ale dreptei.

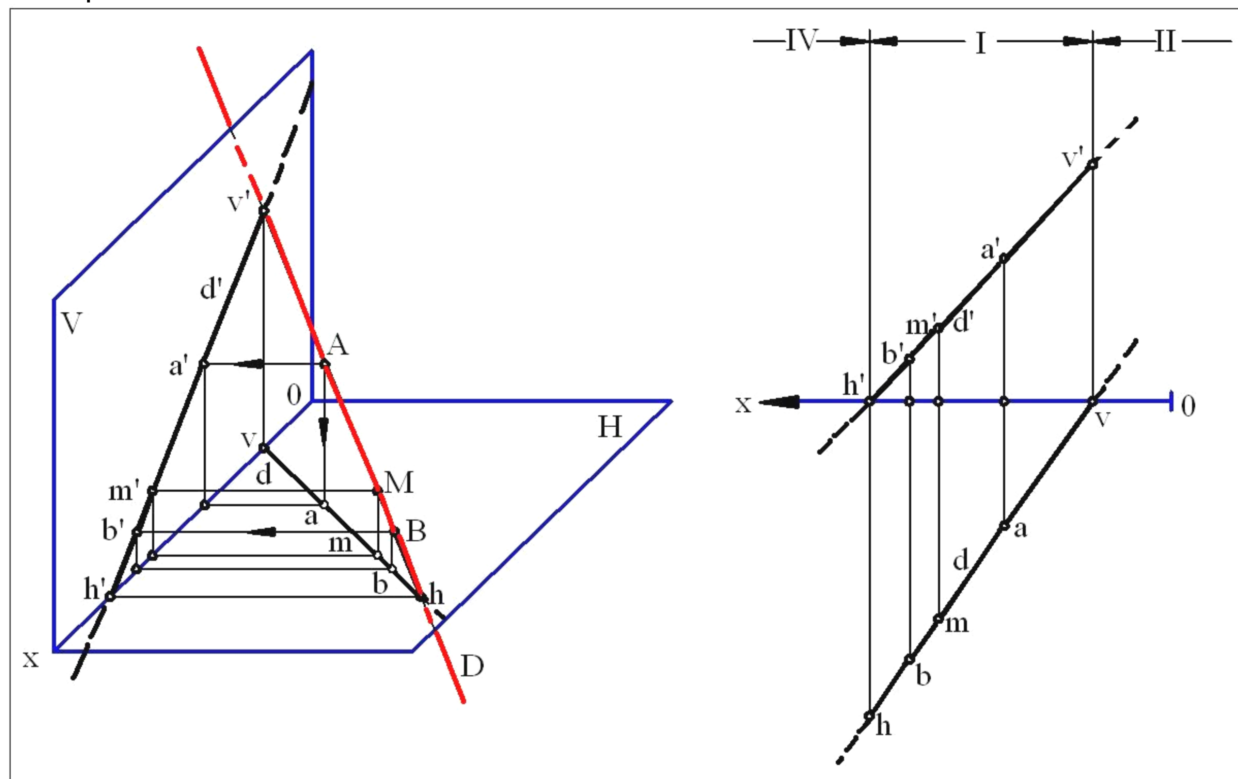


Fig. 3.1.Dreapta AB cu punctul M şi urmele ei.

Se observă că, dacă un punct oarecare ***M*** se află pe dreapta ***D***, atunci proiecțiile lui se vor găsi pe proiecțiile de acelaşi nume ale dreptei. Dacă se prelungeşte dreapta ***D*** dincolo de punctele ***A*** şi ***B***, aceasta va intersecta planul ***H*** în punctul ***h, h'*** , iar planul ***V*** în punctul ***v, v'***.

Punctul *h* în care dreapta intersectează planul *H* se numeşte urma orizontală a dreptei; el are cota egala cu zero şi deci proiecția verticală ***h'*** situată pe linia pământului. **Punctul *v'* în care dreapta intersectează planul *V* se numeşte urma verticală a dreptei**; el are depărtarea egala cu zero şi deci proiecția orizontală v pe linia pământului.

În epură (figura 3.1,b), pentru a găsi urma orizontală a dreptei *D*, se caută punctul de pe dreaptă care are cota zero, adică, punctul care se găseşte în planul orizontal. Pentru aceasta, deoarece cotele se citesc în planul ***V*,** se prelungeşte proiecția verticală a dreptei până când întâlneşte linia pământului în ***h'*** şi apoi din acest punct se coboară linia de ordine până în ***h*,** pe proiecția orizontală a dreptei. Punctul ***h, h'*** astfel obținut este **urma orizontală a dreptei**. În mod analog, dacă se prelungeşte proiecția orizontală o dreptei până când întâlneşte linia ***Ox*** în ***v*** şi apoi din acest punct se ridică linia de ordine până în ***v'***, pe proiecția verticală a dreptei, se obține **urma verticală *v, v'*** a acesteia.

Cele două urme ale unei drepte sunt puncte caracteristice ale acesteia. Ele limitează porțiunile de dreaptă cuprinse în diedre. Astfel:

Dacă se prelungeşte dreapta D dincolo de urmele ei, cea verticală ***(v, v')*** şi orizontală ***(h, h'),*** ea trece respectiv în diedrele ***II, IV***. Pe porțiunile respective, dreapta fiind nevăzută de observatorul aşezat în diedrul ***I,*** se va trasa în epură cu linii întrerupte.

Se reține că un segment de dreaptă are cele două proiecții aşezate în poziții diferite față de linia pământului, după cum se află în unul din cele patru diedre, şi anume:

- în diedrul ***I***, proiecția orizontală sub ***Ox***, cea verticală deasupra;
- în diedrul ***II***, ambele proiecții deasupra lui ***Ox***;
- în diedrul ***III***, proiecția orizontală deasupra lui ***Ox***, cea verticală dedesubt;
- în diedrul ***IV***, ambele proiecții sub ***Ox***.

3.2. Proiecția dreptei pe planul lateral

Trecerea de la dubla proiecție ortogonală a dreptei pe planele ***H*** şi ***V,*** la proiecția ei pe planul lateral ***L,*** se face proiectând lateral două puncte oarecare de pe dreaptă.

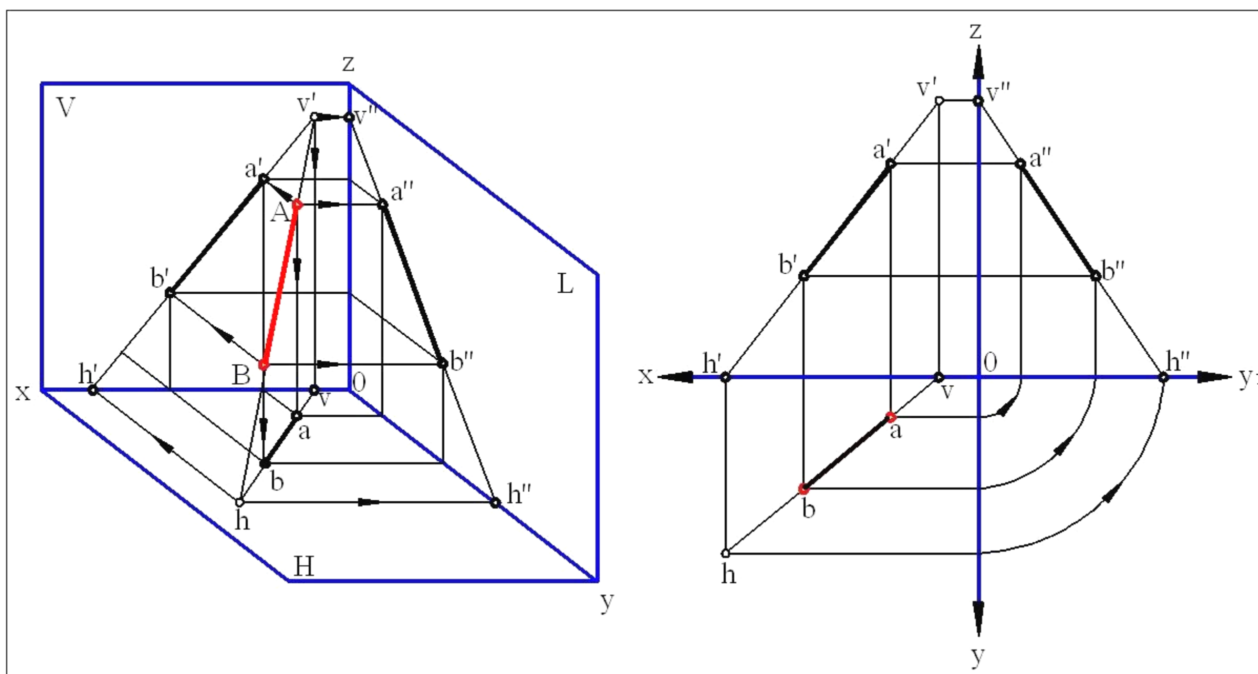


Fig.3.2.Proiecțiile pe cele trei plane ale dreptei AB, în triedru şi epură.

Fie ***ab***, ***a'b'*** dreapta, definită prin doua puncte ale ei, **a, a'** şi **b, b'** (figura 3.2). Proiectând cele două puncte ale dreptei pe planul ***L***, se obține în ***a"b"*** proiecția laterală a dreptei. Dacă în loc de două puncte oarecare de pe dreaptă se recurge la urmele acesteia, se obține proiecția laterală ***h"v***" a dreptei.

3.3. Citirea epurei unei drepte

A citi epura unei drepte înseamnă a ,,vedea în spațiu" dreapta, adică a ne imagina pe baza datelor pe care le oferă epura, poziția pe care o are dreapta în spațiu față de planele de proiecție.

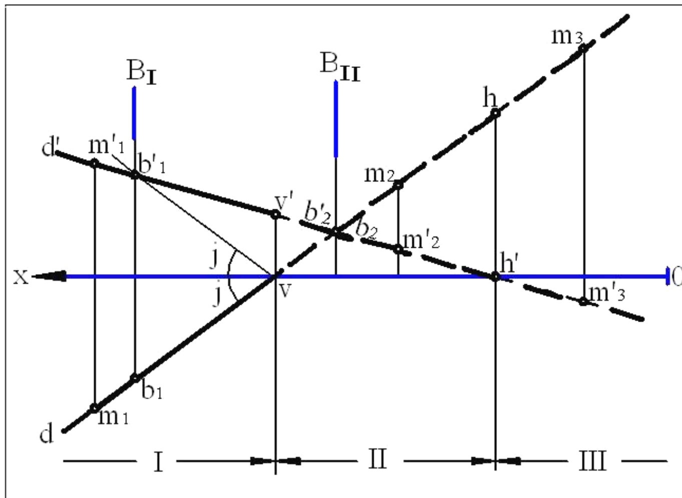


Fig.3.3a. Dreapta D(d,d') în epură.

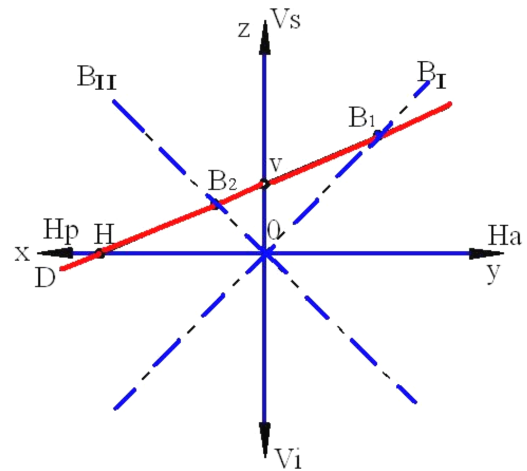


Fig.3.3b. Dreapta D în spațiu.

Fie ***d, d'*** o dreaptă oarecare dată în epură prin cele două proiecții ale ei (figura 3.3,a).

Se determină întâi urmele dreptei în ***h, h'*** şi ***v, v'***.

Se consideră apoi un punct mobil **m,m'** pe dreaptă, care se deplasează pe aceasta, spre exemplu de la stânga la dreapta, şi se urmăreşte în diferitele lui poziții succesive față de planele de proiecție **m1' m1 - m2' m2 - m3' m3**.

Se observă că până în punctul *v, v'* în care dreapta intersectează planul ***V***, punctul ***m, m'*** în poziția ***m1m1'*** are depărtarea pozitivă şi cota pozitivă; rezultă că porțiunea respectivă din dreaptă este în **diedrul I.**

Între urma verticală *v, v'* şi cea orizontală *h, h'*, punctul ***m, m'*** în poziția ***m2, m2'*** continuă să aibă cota pozitivă, depărtarea devine însă negativă; rezultă că porțiunea ***v'h', vh*** a dreptei se găseşte în **diedrul II.**

De la *h, h'* spre dreapta, punctul ***m, m'*** în poziția ***m3, m3'*** are atât depărtarea cât şi cota negative; porțiunea respectivă de dreaptă se găseşte în **diedrul III.**

Conform convenției stabilite asupra **vizibilității,** se trasează cu linii pline proiecțiile dreptei pe porțiunea cuprinsă în diedrul I şi cu linii întrerupte porțiunile cuprinse în celelalte diedre.

Punctul b2, b2' (în epură intersecția celor două proiecții ale dreptei) este şi el un punct particular al dreptei, întrucât **are cota şi depărtarea opuse**, deci este punctul în care **dreapta intersectează al doilea plan bisector BII.**

Pentru a găsi punctul în care **dreapta intersectează primul plan bisector BI,** se duce din punctul ***v,*** în epură, simetrica lui ***d*** față de ***Ox***, în ***v b1'***. Punctul ***b1, b1'*** de pe dreapta dată are **cota egală cu depărtarea** şi deci este punctul căutat.

Cu aceste date cunoscute, se poate acum imagina **poziția dreptei în spațiu**. Se ştie că aceasta vine din diedrul I, traversează diedrul II între cele două urme şi se continuă apoi în diedrul III. Se mai ştie şi că intersectează bisectorul întâi în diedrul I şi bisectorul al doilea în diedrul II. Dacă se reprezintă schematic planele de proiecție şi cele două plane bisectoare, se poate imagina dreapta dată în epură (figura 3.3,b).

3.4. Drepte în poziţii particulare faţă de planele de proiecţie

O dreaptă oarecare poate ocupa diferite poziţii în spaţiu, faţă de planele de proiecţie. Se vor examina câteva cazuri particulare de drepte care prezintă anumite particularităţi în epură.

3.4.1. Drepte paralele cu planele de proiecţie

Orizontala sau dreapta de nivel este dreapta paralelă cu planul H.

Fie ***M*** şi ***N*** (figura 3.4.a şi 3.5.a) cele două puncte care definesc dreapta, întrucât orizontala este paralelă cu planul ***H***, toate punctele ei vor avea aceeaşi cotă. Rezultă că proiecţia verticală ***m'n'*** este paralelă cu linia pământului ***Ox***.

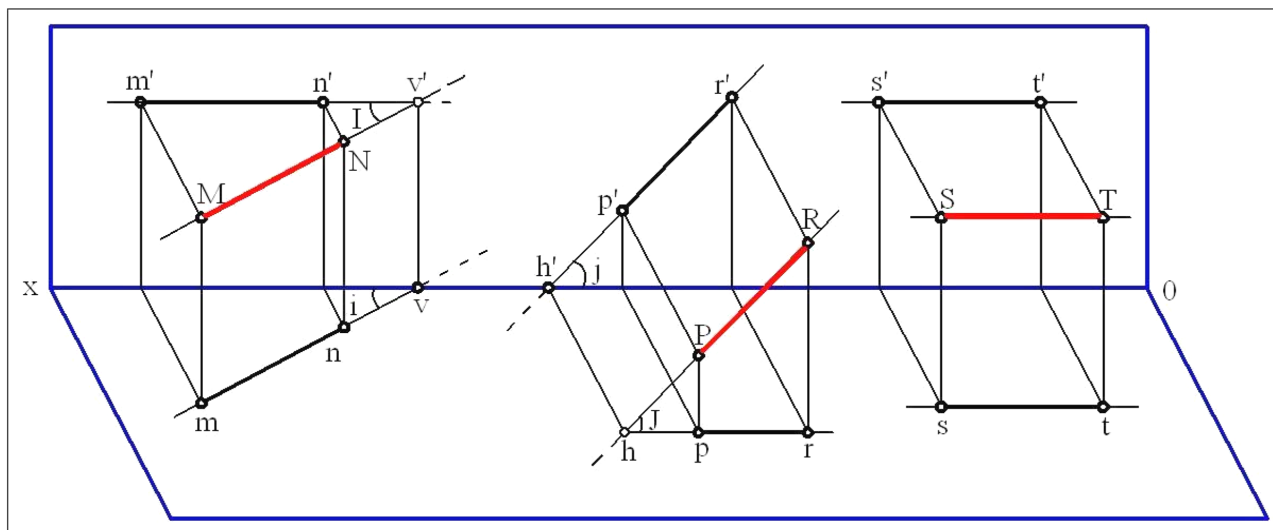


Fig.3.4. Orizontala MN, frontala PR şi fronto-orizontala ST în spaţiu.

Orizontala nu are decât urmă verticală, (***v, v'***); urma orizontală a dreptei este aruncată la infinit, deoarece dreapta, fiind paralelă cu planul ***H***, nu-l întâlneşte niciodată la distanţă finită.

Unghiul ***i*** dintre orizontală şi planul vertical de proiecţie apare în adevărată mărime în proiecţia orizontală, fiind determinat de ***mn*** şi ***Ox***. Atât dreapta ***MN*** cât şi proiecţia ei verticală ***m'n'*** sunt paralele cu planul ***H***, deci unghiul dintre ele va apărea proiectat pe acesta în adevărată mărime.

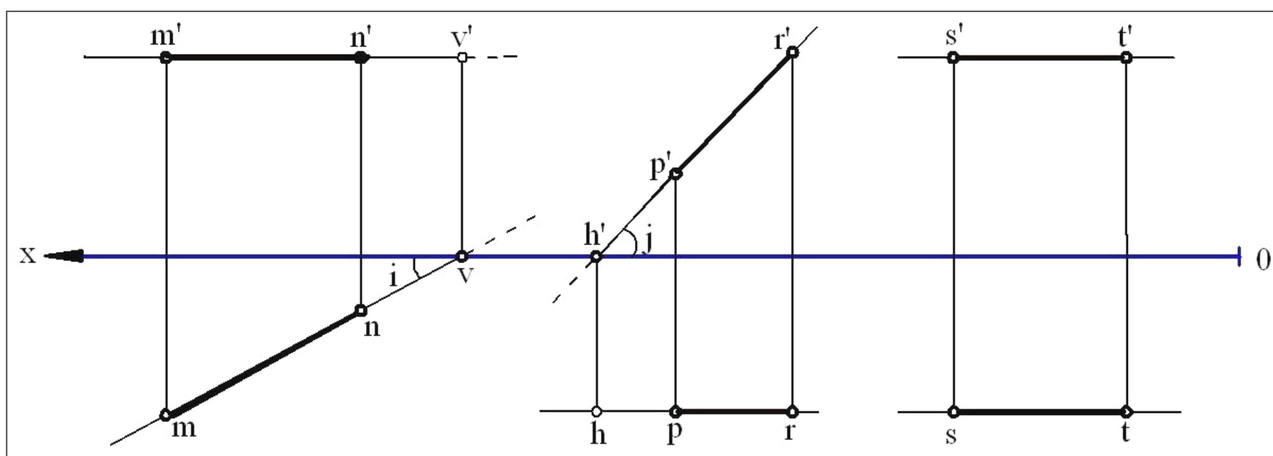


Fig.3.5.a)b)c). Orizontala MN, frontala PR şi fronto-orizontala ST în epură.

Frontala sau dreapta de front este dreapta paralelă cu planul V.

Fie ***P*** şi ***R*** (figura 3.4,b şi 3.5,b) cele două puncte care o determină. Urmând un raţionament analog cu cel de la dreapta de nivel, se deduc caracteristici similare pentru frontală: proiecţia orizontală ***p, r*** a dreptei este paralelă cu linia ***Ox***, deoarece toate punctele ei au aceeaşi depărtare; frontala nu are decât urmă orizontală ***(h, h'),*** deoarece este paralelă cu planul ***V***; unghiul ***j*** dintre frontală şi planul ***H*** apare în adevărată mărime în epură, fiind determinat de ***p'r'*** şi ***Ox.***

Fronto-orizontala este dreapta în acelaşi timp paralelă şi cu planul V şi cu planul H şi deci cu intersecţia lor, linia Ox (figura 3.4.c şi 3.5.c).

Fiind totodată, şi orizontală şi frontală, prezintă caracteristici comune: are ambele proiecţii paralele cu ***Ox***; nu are nici urmă orizontală, nici urmă verticală.

O proprietate metrică importantă, comună tuturor segmentelor paralele cu un plan de proiecţie, este aceea că, **se proiectează în adevărată mărime pe planul cu care sunt paralele** (ca segmente paralele cuprinse între proiectante paralele).

În figurile 3.4. şi 3.5. avem: ***MN = mn; PR = p'r'; ST = st = s't'.***

3.4.2. Drepte conţinute în planele de proiecţie

Dreptele conţinute în planele de proiecţie nu sunt decât cazuri particulare ale dreptelor paralele cu acestea.

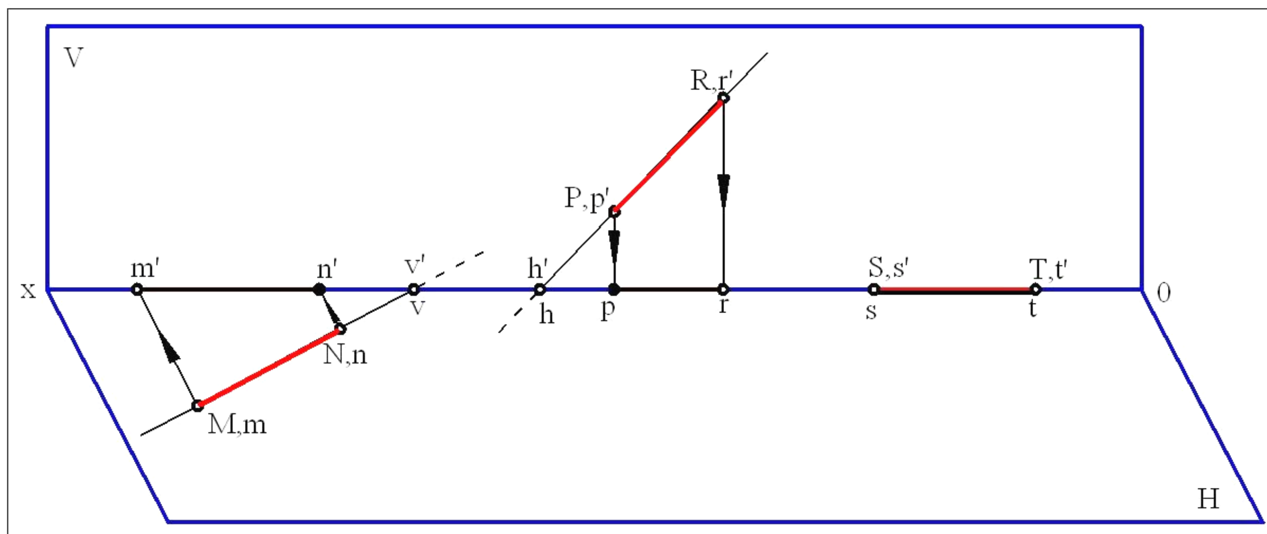


Fig.3.6.a)b)c). Dreptele MN şi PR conţinute în planul H, respectiv V. Dreapta ST este pe Ox;(spaţiu).

Dreapta conţinută în planul H este o orizontală ale cărei puncte au cota egală cu zero (figura 3.6,a şi 3.7,a), deci proiecţia verticală a dreptei se găseşte pe ***Ox*** şi urma verticală a dreptei are cele două proiecţii ***v*** şi ***v'*** confundate pe linia pământului.

Dreapta conţinută în planul V (figura 3.6,b şi 3.7,b) este o frontală cu proiecţia orizontală pe linia pământului şi urma orizontală ***h, h'*** pe linia ***Ox***.

Dreapta conţinută simultan în planul V şi H este o dreaptă aparţinând axei ***Ox*** (figura 3.6,c şi 3.7,c). Este de fapt, o fronto-orizontală având cele două proiecţii confundate pe linia pământului.

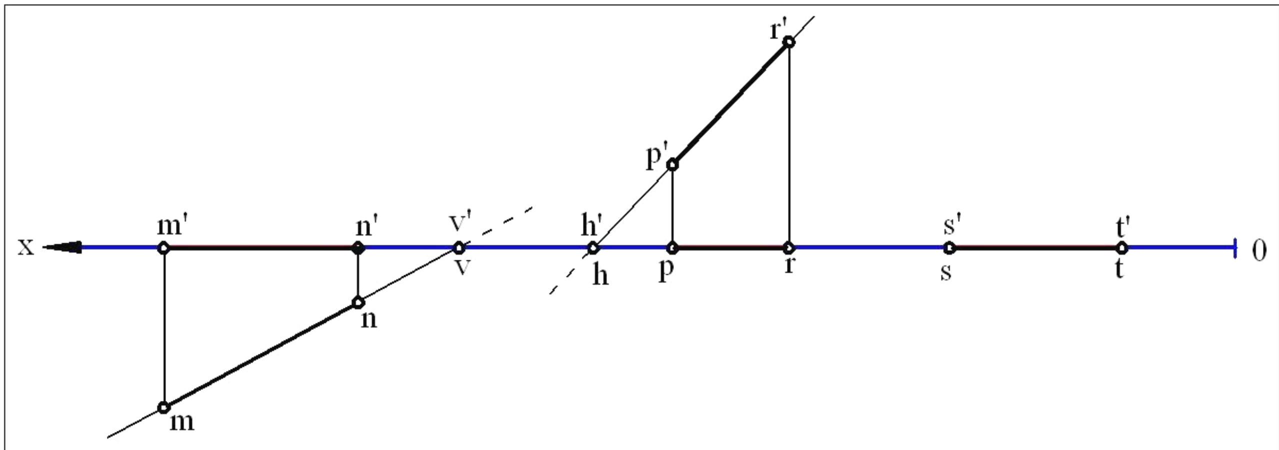


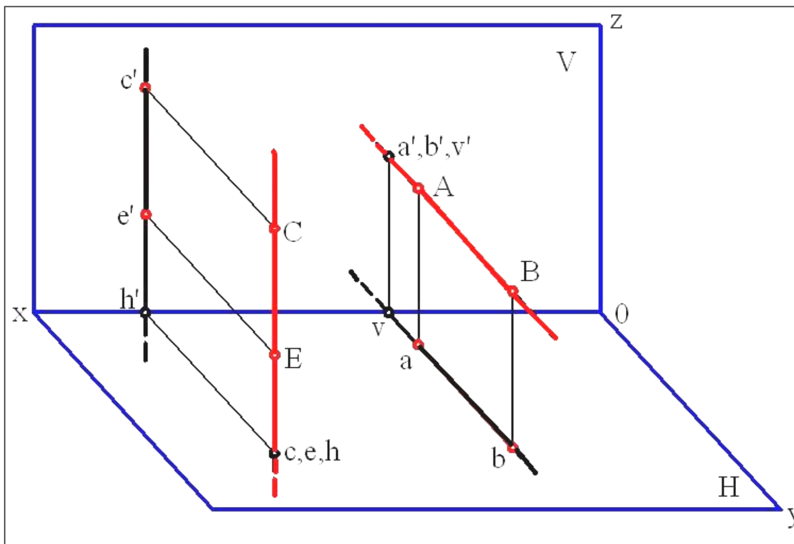
Fig.3.7.a)b)c). Dreptele MN şi PR conținute în planul H, respectiv V. Dreapta ST este pe Ox; (epură).

3.4.3. Drepte perpendiculare pe planele de proiecție

Verticala este dreapta perpendiculară pe planul H şi, implicit, paralelă cu planul V; este deci o frontală într-o poziție particulară (figura 3.8.a şi 3.9.a).

Caracteristicile ei sunt:

- se proiectează pe planul ***H*** într-un singur punct, întrucât toate punctele dreptei sunt pe aceeaşi proiectantă, iar pe planul ***V*** după dreapta ***c'e'***, perpendiculară pe ***Ox***;
- punctul care reprezintă proiecția orizontală a dreptei este în acelaşi timp şi urma orizontală a acesteia; verticala nu are urmă verticală, fiind paralelă cu planul ***V***;
- verticala fiind o frontală particulară, segmentul ***CE*** se proiectează în adevărată mărime pe planul ***V*** în ***c'e'.***



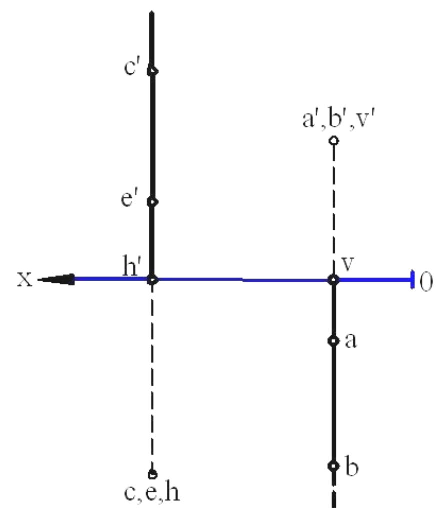


Fig. 3.8.a.b.Verticala şi dreapta de capăt (spațiu). *Fig. 3.9.a.b. Idem – epură.*

Dreapta de capăt este perpendiculară pe planul V şi, implicit, paralelă cu planul H; ***este deci o orizontală într-o poziție particulară*** (figura 3.8,b şi 3.9,b).

Caracteristicile ei sunt:

- se proiectează pe planul ***V*** într-un singur punct, care este în acelaşi timp şi urma verticală a dreptei;
- proiecția orizontală ***ab*** a dreptei este perpendiculară pe linia ***Ox,*** reprezentînd adevărata mărime a segmentului ***AB*** din spațiu.

3.4.4. Dreapta perpendiculară pe linia pământului

Dreapta perpendiculară pe linia pământului fiind cuprinsă într-un plan P paralel cu planul lateral, se numeşte dreaptă de profil.

Planul P este în acelaşi timp şi planul proiectant al dreptei, fiind perpendicular pe planele ***H*** şi ***V*** (figura 3.10,a) şi deci şi pe ***Ox*;** rezultă că proiecțiile ***d*** şi ***d'*** ale dreptei vor fi perpendiculare pe linia ***Ox***, iar în epură vor fi în prelungire (figura 3.10,b). Se observă că oricare ar fi poziția dreptei de profil în planul ***P***, proiecțiile ei pe cele doua plane ***H*** şi ***V*** sunt invariabil ***d*** şi ***d'***. Rezultă că dreapta de profil nu este determinată prin proiecțiile ei ***d*** şi ***d'***, deci face excepție de la regula generală.

Pentru determinarea urmelor dreptei în epură, metoda cunoscută nu poate fi aplicată, în consecință, pentru a defini o dreaptă de profil în epură, este necesar ca aceasta să fie reprezentată prin două puncte ***m, m'*** şi ***n, n'*** de pe dreaptă, sau pe lângă cele două proiecții ***d*** şi ***d'*** să fie dată şi proiecția ***d"*** a dreptei pe planul lateral.

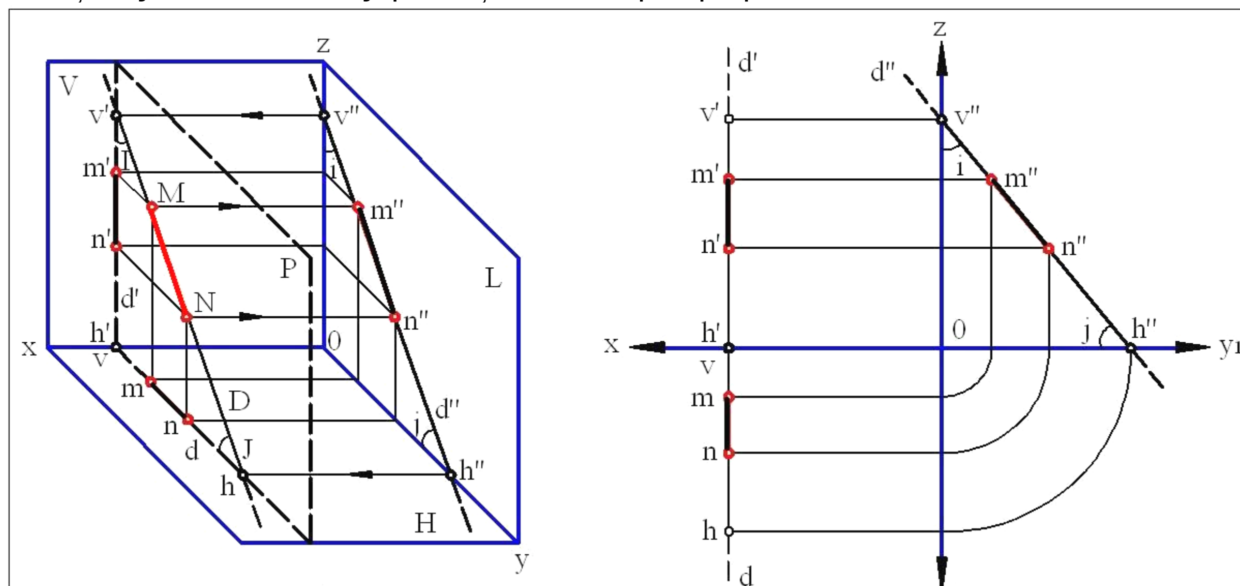


Fig. 3.10.Urmele dreptei de profil, în triedru a) şi epură b).

Dacă **dreapta este dată prin două puncte m, m' şi n, n'** (fig. 3.10. a, b), pentru a obține proiecția laterală ***d"*** a acesteia se proiectează, după metoda cunoscută, cele două puncte ***M*** şi ***N*** şi pe planul ***L*** respectiv în ***m"*** şi ***n".*** Prelungind proiecția aflată ***d"*** dincolo de punctele ***m"*** şi ***n",*** rezultă, la intersecția acesteia cu axele ***Oy1*** şi ***Oz***, proiecțiile laterale ***h"*** respectiv ***v"*** ale urmelor dreptei. Revenind acum pe calea cunoscută cu ***h"*** şi ***v''*** pe proiecțiile ***d*** şi ***d'*** ale dreptei, se obțin proiecțiile ***h, h'*** şi ***v, v'*** ale urmelor acesteia.

Dreapta de profil fiind paralelă cu planul ***L,*** segmentul ***MN*** de pe aceasta se proiectează în **adevărată mărime în *m" n"*** pe ***L***.

Unghiurile făcute de dreaptă cu planele ***V*** şi ***H,*** respectiv ***I*** şi ***J***, apar în adevărată mărime pe planul lateral, fiind determinate de ***m"n"*** şi ***Oz,*** respectiv ***m"n"*** şi ***Oy1***.

3.4.5. Dreapta care intersectează linia pământului

Această dreaptă intersectează atât planul H cât şi planul V în acelaşi punct, pe linia pământului (figura 3.11.). Rezultă că, în epură cele două proiecții ale dreptei se întâlnesc într-un punct ***r, r'*** pe linia ***Ox*** şi că acest punct este în acelaşi timp urma orizontală şi urma verticală a dreptei.

Întrucât planele bisectoare trec prin linia pământului, rezultă că dreptele conținute în aceste plane reprezintă în general cazuri particulare ale dreptelor care intersectează linia ***Ox***.

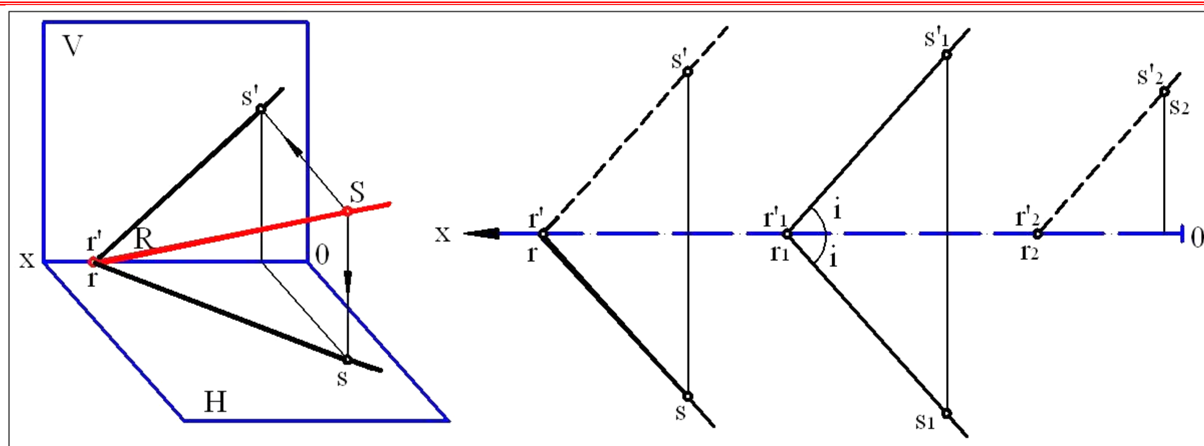


Fig. 3.11.Dreapta ce trece prin linia de pământ, diedru şi epure.

- Dreptele conținute în primul bisector (figura 3.11,c) au proiecțiile lor simetrice față de ***Ox***, întrucât au toate punctele de cotă egală cu depărtarea;
- Dreptele conținute în cel de-al doilea bisector (figura 3.11,d) au proiecțiile lor confundate, deoarece au toate punctele cu cota egală cu depărtarea şi de semn contrar.

3.5. Pozițiile relative a două drepte

Două drepte din spațiu pot fi: **paralele sau concurente** şi deci coplanare, şi **oarecare**, adică nici paralele, nici concurente, deci necoplanare.

3.5.1. Drepte paralele

Proiecțiile a două drepte paralele din spațiu sunt şi ele paralele (figura 3.12,a). Rezultă că în epură (figura 3.12,b), proiecțiile de acelaşi nume a două drepte paralele din spațiu sunt şi ele paralele (***ab*** este paralel cu ***ce*** şi ***a'b'*** cu ***c'e'***).

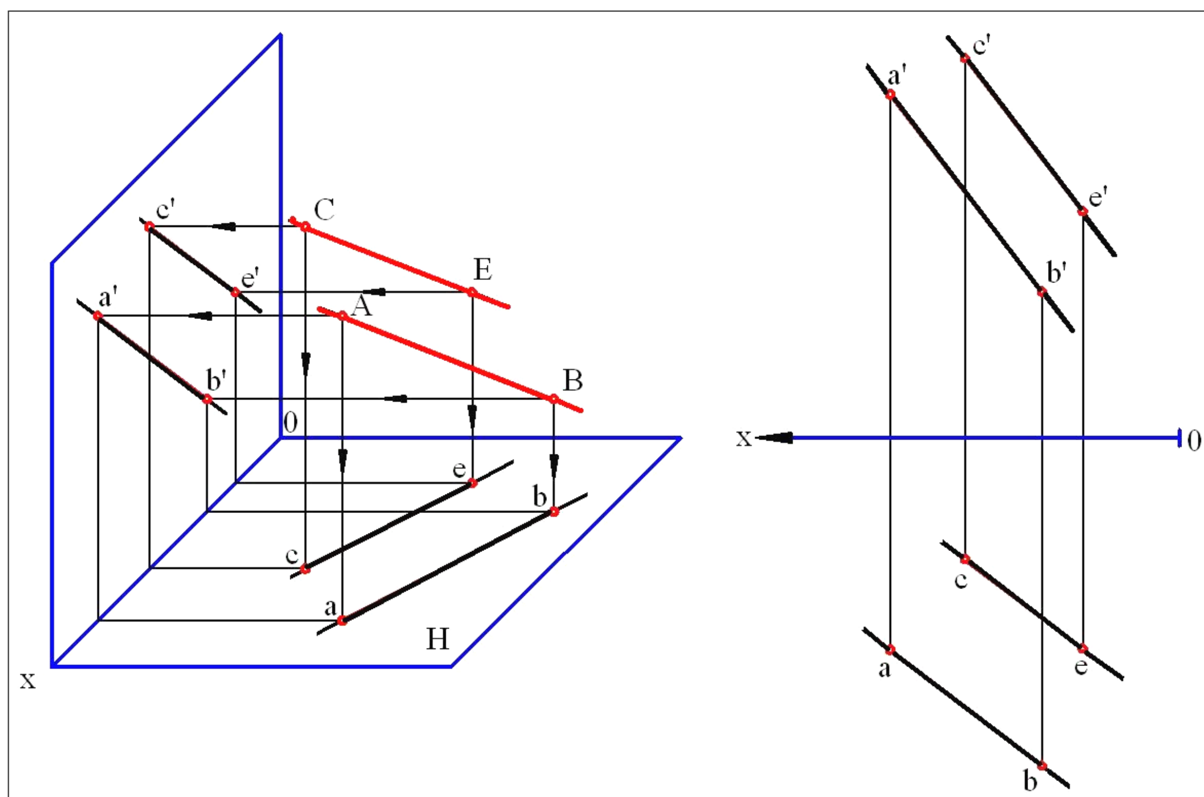


Fig. 3.12.Drepte paralele, diedru a) şi epură b).

Reciproca acestei teoreme este în general adevărată: *dacă în epură proiecțiile de acelaşi nume a două drepte sunt paralele între ele, rezultă că ele reprezintă două drepte paralele între ele în spațiu.*

Fac excepție de la această regulă dreptele de profil pentru care paralelismul trebuie dovedit şi prin proiecția pe planul lateral *L*.

Într-adevăr, fie ***ab, a'b'*** şi ***ce, c'e'*** (figura 3.13) cele două drepte de profil, întrucât ab este paralelă cu ce şi a'b' cu c'e', ar rezulta, conform teoremei enunțate, că cele două drepte ***AB*** şi ***CE*** sunt paralele între ele în spațiu. Acest lucru nu se confirmă însă dacă se proiectează dreptele şi pe planul ***L***. Într-adevăr, ***a"b"*** nu este paralel cu ***c"e"***, deci cele două drepte ***AB*** şi ***CE*** nu sunt paralele între ele în spațiu.

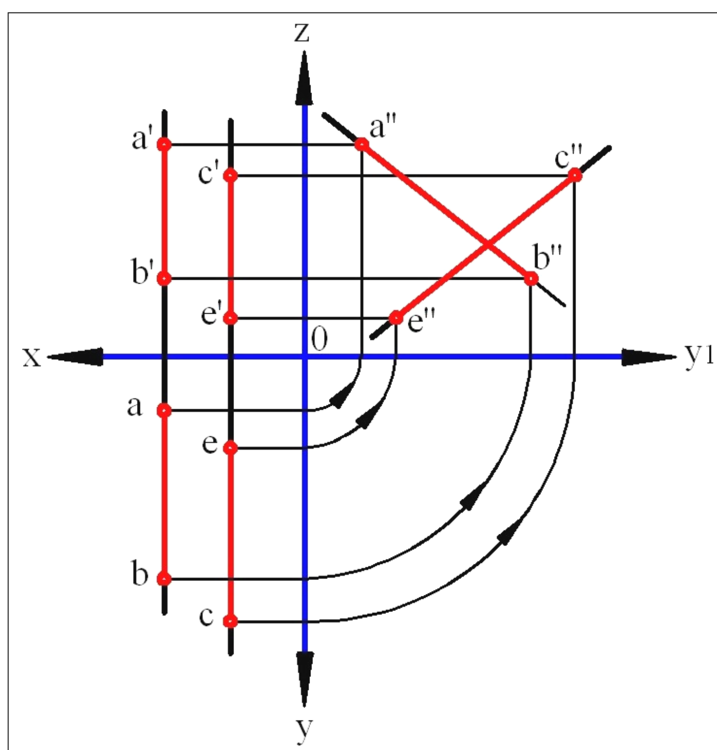


Fig.3.13.Drepte de profil, neparalele (epură).

3.5.2. Drepte concurente

Două drepte concurente în spațiu au şi proiecțiile lor pe un plan concurente. Punctul de concurență al proiecțiilor este proiecția punctului de concurență al dreptelor din spațiu. Dacă cele două drepte concurente se proiectează pe planele ***H*** şi ***V*** (figura 3.14,a,b) proiecțiile lor orizontale (***ab*** şi ***ce***) vor fi concurente şi cele verticale (***a'b'*** şi ***c'e'***) de asemenea.

În plus, întrucât **punctul de concurență *k, k'*** este comun celor două drepte, rezultă că în epură punctul de concurență ***k*** trebuie să fie pe aceeaşi linie de ordine cu punctul de concurență ***k'***. **În concluzie*:*** *două drepte concurente din spațiu au, în epură, proiecțiile de acelaşi nume concurente şi punctele de concurentă ale proiecțiilor de acelaşi nume pe aceeaşi linie de ordine*.

Reciproc, se poate spune că, în general, *dacă proiecțiile de acelaşi nume a două drepte sunt concurente şi punctele respective de intersecție sunt pe aceeaşi linie de ordine, dreptele sunt concurente.*

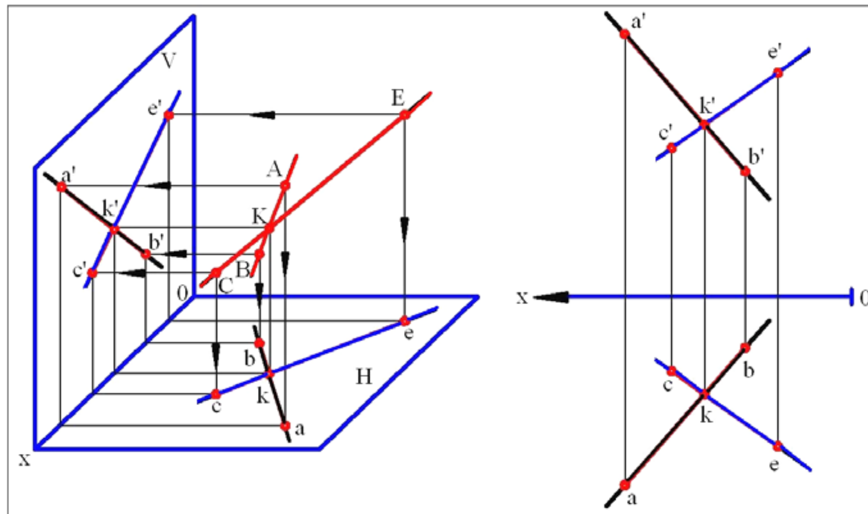


Fig. 3.14.a, b. Drepte concurente în K.

Fac excepție de la această regulă dreptele de profil, a căror concurență chiar cu alte drepte trebuie verificată şi în proiecția pe planul lateral *L*.

Astfel**,** fie o dreaptă oarecare ***ab, a'b'*** şi una de profil ***mn, m'n'*** (figura 3.15). Conform teoremei enunțate, cele două drepte din spațiu ***AB*** şi ***MN*** ar trebui să fie concurente, deoarece ***ab*** şi ***mn*** sunt concurente, ***a'b'*** şi ***m'n'*** de asemenea, iar ***k1*** este pe aceeaşi linie de ordine cu ***k2'***. Dacă se proiectează însă dreptele pe planul **L,** se vede că punctul ***k3*** de concurență a proiecțiilor ***a"b"*** şi ***m"n"*** nu este pe aceeaşi linie de ordine cu ***k1*** şi ***k2'***, deci cele două drepte ***AB*** şi ***MN*** din spațiu nu sunt concurente.

Punctele ***k1, k2*** şi ***k3*** se numesc **puncte de concurență aparentă**, fiind de fapt numai puncte de concurență ale proiecțiilor, nu şi ale dreptelor corespunzătoare din spațiu.

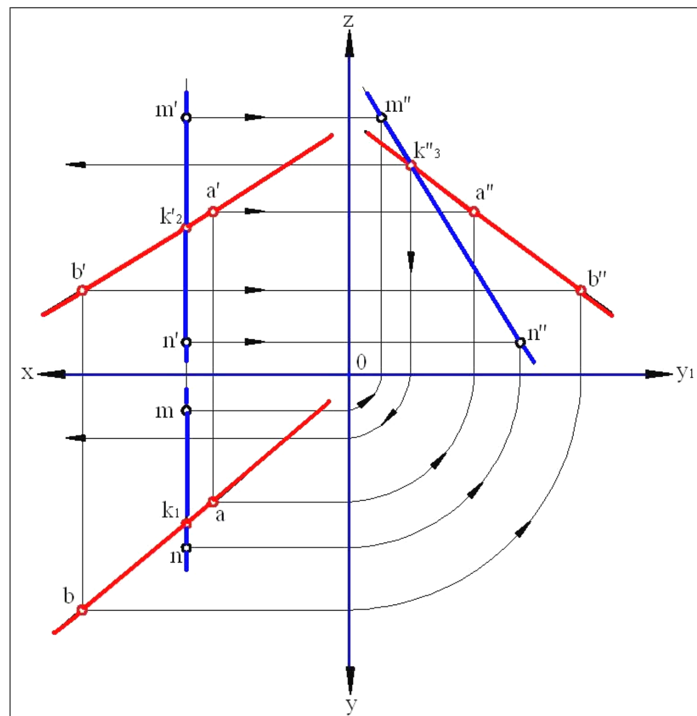
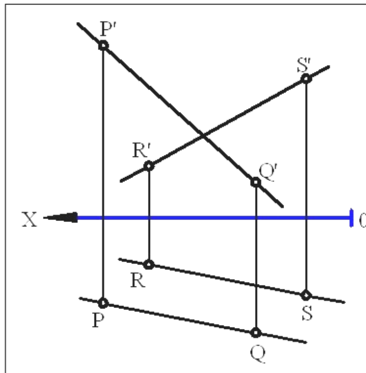
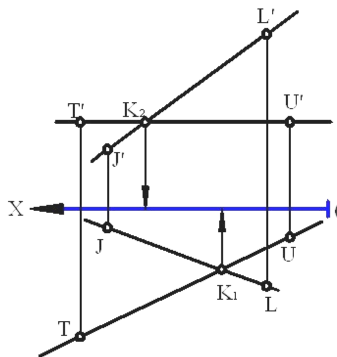


Fig. 3.15. Dreptele AB şi MN neconcurente.

3.5.3. Drepte oarecare

Dreptele care nu sunt nici concurente şi nici paralele sunt într-o poziţie oarecare una faţă de cealaltă. Pentru ca două drepte să fie într-o poziţie oarecare va trebui deci ca proiecţiile lor să nu îndeplinească nici una din condiţiile stabilite pentru dreptele paralele şi concurente.





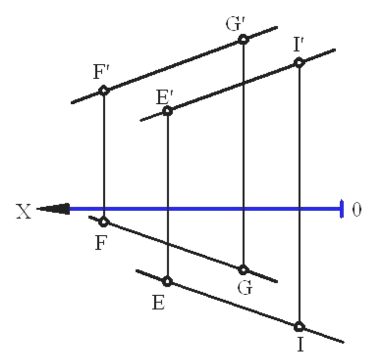


Fig. 3.16. Drepte oarecare. ***Fig. 3.17. Idem.*** ***Fig. 3.18. Idem.***

Astfel, dreptele:

- ***PQ*** şi ***RS*** (figura 3.16.) nu sunt nici concurente şi nici paralele, deoarece nu au decât proiecţiile orizontale paralele, respectiv cele verticale concurente;
- ***TU*** şi ***JL*** (figura 3.17.) nu sunt concurente, deoarece deşi ***tu*** este concurentă cu ***jl*** şi ***t'u'*** cu ***j'l'***, punctele ***k1*** şi ***k2'*** sunt numai puncte de concurenţă aparentă, nefiind pe aceeaşi linie de ordine;
- ***FG*** şi ***EI*** (figura 3.18.) nu sunt paralele, deoarece proiecţiile de acelaşi nume ale celor două drepte nu sunt paralele între ele (***fg*** cu ***ei*** şi ***f'g'*** cu ***e'i'***).

Rezultă că dreptele reprezentate în cele trei epure sunt drepte oarecare.

Se mai face următoarea convenţie în privinţa poziţiei observatorului faţă de planele de proiecţie:

Se consideră că proiecţia orizontală a unui obiect constituie aspectul său pentru un observator aşezat la o distanţă infinită deasupra planului H şi privind în direcţia proiectantelor faţă de acesta. În mod analog, proiecţia verticală a obiectului constituie aspectul său pentru un observator aşezat la o distanţă infinită în faţa planului V şi privind în direcţia proiectantelor faţă de acesta.

O problemă care se pune la dreptele oarecare este aceea de a stabili ***care din cele două drepte trece deasupra, respectiv prin faţa celeilalte***. Problema se rezolvă cu ajutorul punctelor de concurenţă aparentă din cele două proiecţii.

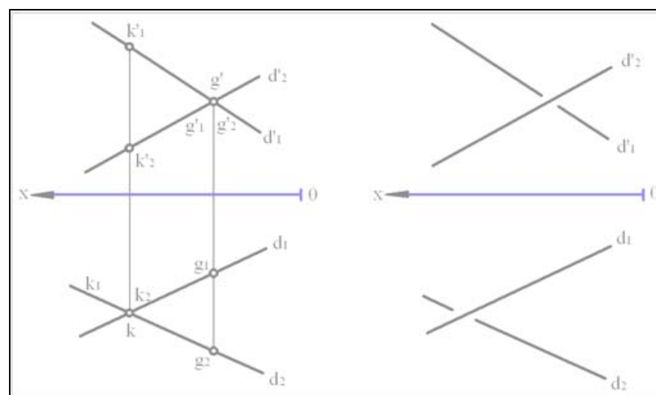


Fig. 3.19. Dreptele D1 şi D2 în poziţie oarecare.

Fie ***D1*** şi ***D2*** (figura 3.19,a) cele două drepte oarecare. Dacă se urmăreşte epura, se vede că, de fapt în punctul de concurenţă aparentă ***k***, se suprapun proiecţiile orizontale ***k1*** şi ***k2*** a două puncte din spaţiu: unul de pe dreapta,***d1, d1'*** şi celălalt de pe ***d2, d2'***. Proiecţiile verticale ***k1'*** şi ***k2'*** ale celor două puncte se găsesc la intersecţia liniei de ordine ridicată din ***k***, respectiv cu ***d1'*** şi ***d2'***. Deoarece punctul ***k1, k1'*** de pe dreapta ***d1, d1'*** are cota mai mare decât ***k2, k2'*** de pe ***d2, d2'***, rezultă că dreapta, ***d1, d1'*** trece deasupra dreptei ***d2, d2'***.

Este de remarcat că segmentul ***K1K2***, care se proiectează orizontal în ***k***, nu este altceva decât verticala care se reazemă pe cele două drepte date.

În mod similar, dacă se porneşte de la punctul de concurenţă aparentă ***g'*** şi se determină proiecţiile punctelor ***g1, g1'*** şi ***g2, g2'***, se deduce că dreapta ***d2, d2'*** este în faţa dreptei ***d1, d1'***. Segmentul ***G1G2***, proiectat vertical în ***g'***, este dreapta de capăt care se reazemă pe cele două drepte date.

Pentru a face epura mai expresivă se obişnuieşte ca proiecţia dreptei care este dedesubtul, respectiv în spatele celeilalte drepte, să fie întreruptă în dreptul punctului de concurenţă aparentă (figura 3.19,b).

3.5. Proiecţia unghiurilor plane

Două drepte concurente determină un unghi plan. Acest unghi se proiectează ortogonal pe planele ***H*** şi ***V***, în general deformat.

Dacă planul dreptelor este paralel cu unul din planele de proiecţie, unghiul dintre ele se va proiecta pe acesta, în adevărată mărime. Rezultă că unghiul determinat de două drepte de nivel va apărea în adevărată mărime pe planul ***H***, după cum unghiul a două drepte frontale se va obţine în adevărată mărime în proiecţia pe planul ***V***.

Dacă unghiul celor două drepte concurente este drept, este suficient ca numai una din ele să fie paralelă, cu planul de proiecţie (orizontală sau frontală) pentru ca unghiul să se proiecteze pe acesta în adevărată mărime.

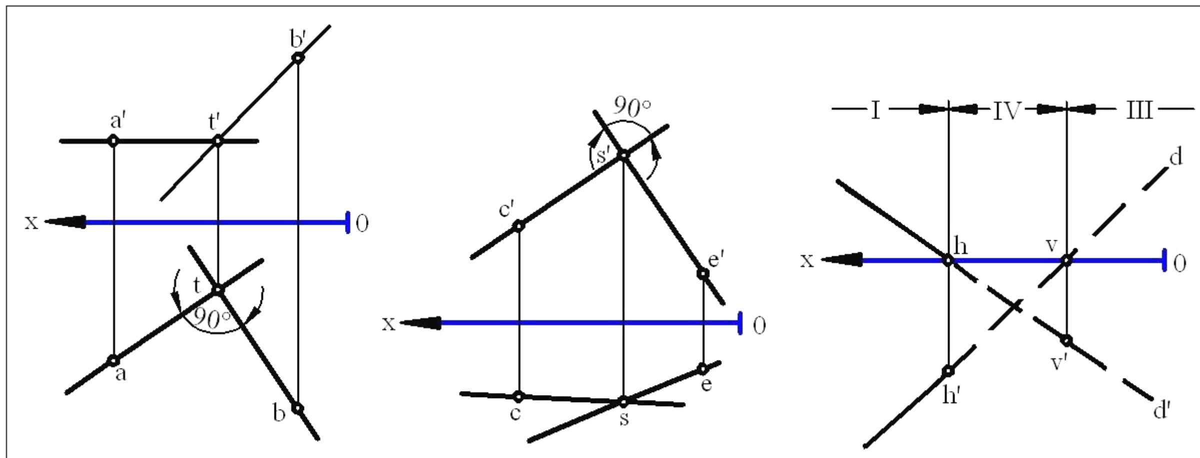


Fig. 3.20. Drepte perpendiculare. ***Fig. 3.21.Idem.*** ***Fig. 3.22. Aplicaţia 1.***

În epura din figura 3.20 sunt reprezentate două drepte perpendiculare ***at, a't'*** şi ***bt***, ***b't'***. Dreptele sunt perpendiculare, deoarece una din ele ***AT,*** este o orizontală, iar proiecţiile orizontale ***at*** şi ***bt*** se întâlnesc sub un unghi drept.

Dreptele ***cs, cs'*** şi ***es, es'*** (figura 3.21) sunt de asemenea perpendiculare, deoarece ***CS*** este o frontală şi proiecţiile verticale ***c's'*** şi ***e's'*** se intersectează sub un unghi de 90°.

3.7. Aplicații

1) Cunoscând proiecțiile v' şi h ale urmelor unei drepte, să se găsească proiecțiile d şi d' ale acesteia (figura 3.22).

Rezolvare:

Se determină întâi proiecțiile de nume contrar, ***v*** şi ***h'***, ale celor două urme ducând linii de ordine respectiv din ***v'*** şi ***h*** până la linia de pământ. Se unesc ***v*** cu ***h*** şi se obține proiecția orizontală ***d*** şi apoi ***v'*** cu ***h'*** şi se obține proiecția verticală ***d'*** a dreptei.

2) Se dă o dreaptă prin proiecțiile d şi d' paralele între ele (figura 3.23). Se cere să se arate care este poziția dreptei față de planele de proiecție şi planele bisectoare.

Rezolvare:

Se determină, punctele caracteristice ale dreptei (urmele şi punctele de intersecție cu cele două plane bisectoare). Analizând semnele coordonatelor punctelor de pe dreaptă, se ajunge la concluzia că aceasta traversează pe rând diedrele ***IV, I*** şi ***II***. Întrucât proiecțiile ***d*** şi ***d'*** ale dreptei sunt paralele între ele, rezultă că dreapta nu intersectează al doilea plan bisector, deci este paralelă cu el.

3) Se dă o dreaptă de profil prin două puncte ale ei: M (2; 1; 1,5) şi N (2; 4; 4). Se cere proiecția verticală s' a unui punct S de depărtare egală cu 2, situat pe dreaptă (figura 3.24).

Rezolvare:

Se reprezintă întâi dreapta de profil ***mn, m'n'*** în epură şi pe această dreaptă proiecția ***s*** cunoscută. Pentru a găsi pe ***s'*** se proiectează dreapta pe planul lateral în ***m"n"*** după metoda cunoscută şi apoi, pornind din ***s***, se obține ***s"*** şi de aici proiecția căutată ***s'***, urmând drumul arătat în figură prin săgeți.

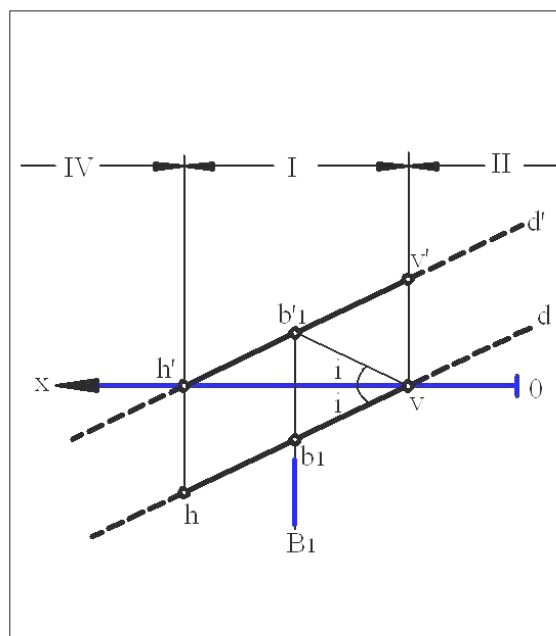


Fig.3.23. Aplicația 2.

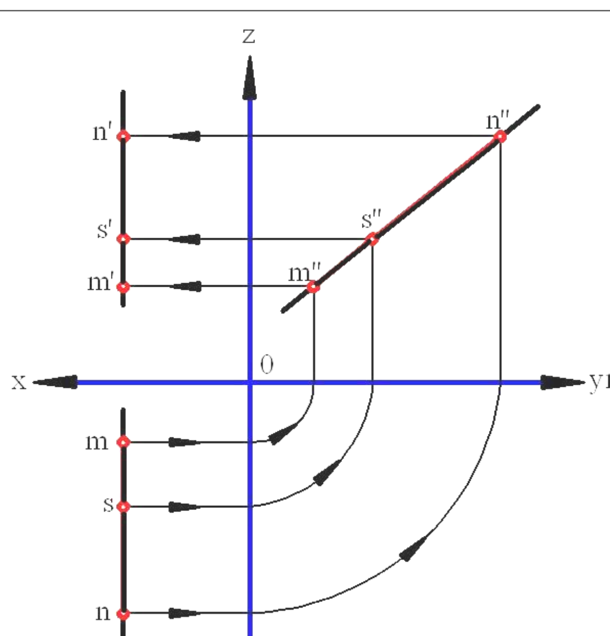


Fig.3.24. Aplicația 3.

4) Să se construiască o dreaptă care să treacă printr-un punct dat s, s' şi să se sprijine pe o dreaptă data d, d' (figura 3.25).

Rezolvare:

Se duce întâi proiecția verticală ***u'*** a dreptei trecând prin ***s'*** şi având o direcție arbitrară. La intersecția lui ***u'*** cu ***d'***, se obține proiecția verticală ***t'*** a punctului de sprijin. Cu ajutorul liniei de ordine duse prin ***t'*** se obține pe ***d*** proiecția orizontală ***t*** a punctului şi, cu ajutorul ei, proiecția orizontală ***ts*** a dreptei căutate. Problema are o infinitate de soluții, ceea ce rezultă şi din epură, întrucât ***s't'*** s-a putut lua arbitrar.

Dacă se impune condiția ca dreapta dusă prin ***s, s'*** să fie o orizontală, problema nu are decât o soluție. Într-adevăr, proiecția verticală ***s'r'*** (trasată cu linie-punct în epură) trebuind să fie paralelă cu linia ***Ox*** (dreaptă orizontală), punctul ***r', r*** şi proiecția ***rs*** au acum poziții unice.

5) Să se verifice dacă două drepte ab, a'b' şi ce, c'e' ale căror proiecții nu se întâlnesc în cadrul epurei sunt sau nu concurente (figura 3.26).

Rezolvare:

Dacă dreptele sunt concurente, sunt şi coplanare. Dacă sunt coplanare, atunci, ducând două drepte oarecare ***rs, r's'*** şi ***tu, t'u'*** care să se sprijine pe ele, acestea vor aparține şi ele aceluiaşi plan, deci vor trebui la rândul lor să îndeplinească, în epură, condiția de concurență cunoscută.

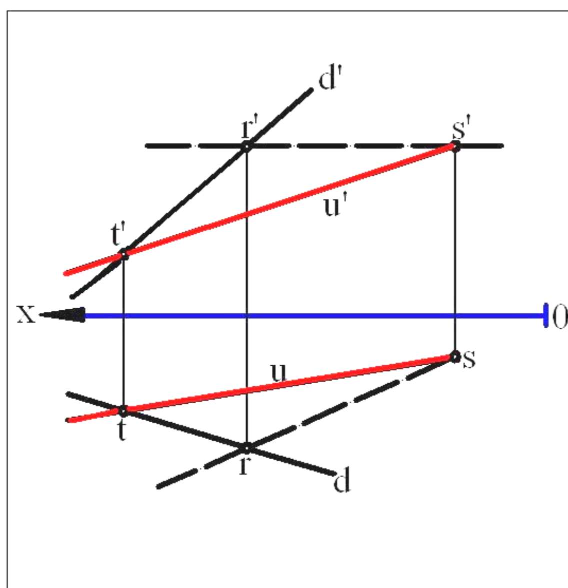


Fig. 3.25. Aplicația 4.

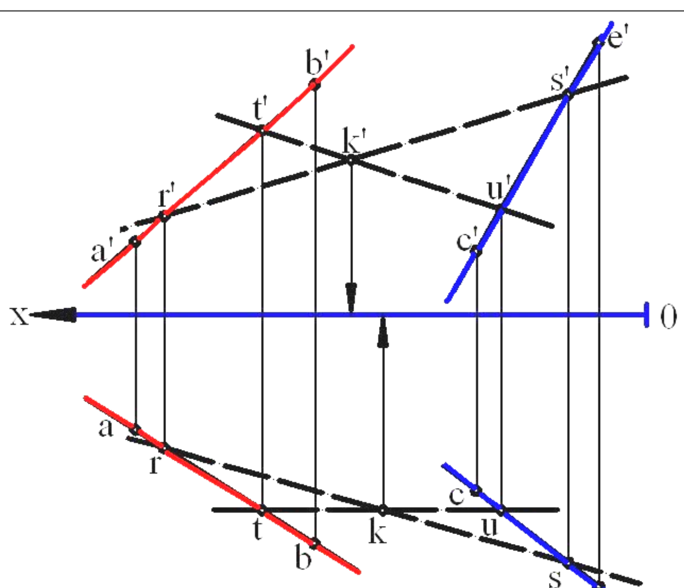


Fig. 3.26. Aplicația 5.

În epura din figura 3.26 se vede că cele două drepte date nu sunt concurente, întrucât proiecțiile ***k*** şi ***k'*** nu sunt pe aceeaşi linie de ordine.

6) Să se construiască perpendiculara comună la o dreaptă oarecare d, d' şi o dreaptă de capăt c, c' (figura 3.27).

Rezolvare:

Dreapta de capăt fiind perpendiculară pe planul ***V***, rezultă că orice dreaptă perpendiculară pe aceasta va fi paralelă cu planul ***V***, deci o frontală. Dacă se ştie că perpendiculara comună celor două drepte este o frontală, potrivit celor stabilite la proiectarea unghiului drept, rezultă ca unghiul de 90° dintre frontală şi dreapta oarecare ***d***, ***d'*** se va proiecta în adevărată mărime pe planul ***V***. Cu aceste observații se poate construi acum perpendiculara comună şi în epură.

Prin punctul ***c'***, proiecția verticală a dreptei de capăt, se duce proiecția verticală ***g'*** a perpendicularei comune, perpendicular pe ***d'***. Cu ajutorul liniei de ordine ce trece prin ***t'*** se găseşte pe ***d*** proiecția orizontală ***t*** a punctului de intersecție dintre dreapta oarecare ***d, d'*** şi perpendiculara comună. Proiecția orizontală ***g*** a acesteia se obține ducând prin ***t*** o paralelă la ***Ox*** (proiecția orizontală a unei frontale).

7) Se dau un punct m, m' şi o dreaptă fronto-orizontală d,d' (figura 3.28). Se cere să se construiască în epură un pătrat având un vârf în m,m' şi o latură pe fronto-orizontala d,d'.

Rezolvare:

Întrucât latura pătratului care se găseşte pe dreapta ***d, d'*** este fronto-orizontală, rezultă că şi latura opusă, care trece prin ***m,m'*** va fi tot fronto-orizontală. Celelalte două laturi fiind perpendiculare pe cele două fronto-orizontale, vor fi segmente de profil. Cele două fronto-orizontale se proiectează pe planul lateral după punctele ***d"*** şi ***m"***, iar laturile de profil ale pătratului după segmentul ***d"m",*** în adevărată mărime.

Pentru a construi proiecțiile pătratului pe planele ***V*** şi ***H*** se duc întâi din ***m*** şi ***m'*** proiecțiile ***mn*** şi ***m'n'*** ale uneia din laturile de profil ale pătratului, respectiv perpendicular pe ***d*** şi ***d'*** (unghiul de 90° făcut de laturile pătratului apare în adevărata mărime atât pe ***H*** cât şi pe ***V***, întrucât ***d,d'*** este paralelă cu ambele plane de proiecție).

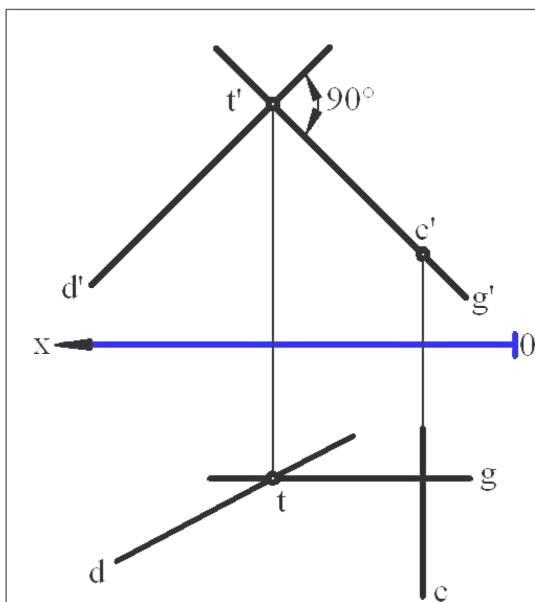


Fig. 3.27.Aplicația 6.

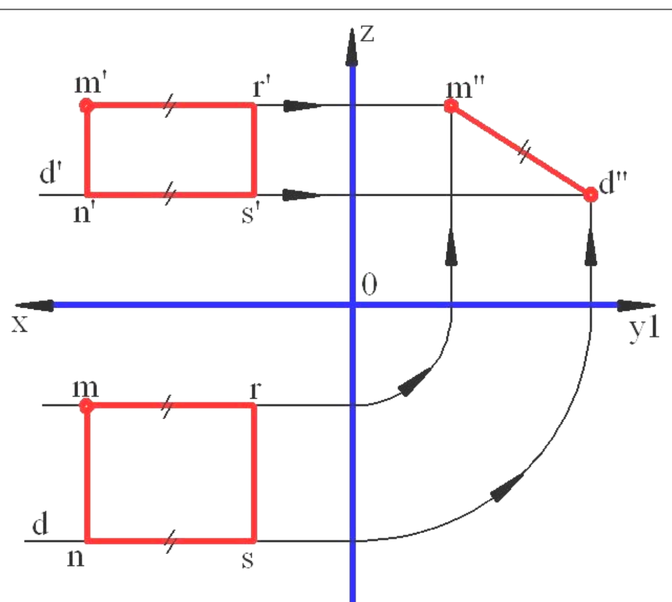


Fig. 3.28. Aplicația 7.

Pe proiecțiile celor două fronto-orizontale se poartă din ***m*** şi ***n***, respectiv ***m'*** şi ***n'***, segmente de lungime egală cu ***d" m"*** (laturile respective ele pătratului apar în adevărată mărime pe planele, ***H*** şi ***V***, ca fronto-orizontale). Unind între ele punctele ***r*** şi ***s***, respectiv ***r'*** şi ***s'*** astfel aflate, se obțin şi proiecțiile celei de-a patra laturi a pătratului.

4. REPREZENTAREA PLANULUI

4.1. Urmele planului

Un plan oarecare poate fi reprezentat în epură prin proiecțiile elementelor geometrice care îl determină, adică trei puncte necoliniare, o dreaptă şi un punct exterior ei, două drepte concurente sau două drepte paralele.

Acest mod de reprezentare, nu este însă sugestiv şi de aceea, se preferă reprezentarea prin dreptele prin care planul dat P intersectează planele ***H*** şi ***V***.
Aceste drepte se numesc ***urma orizontală*** şi respectiv ***urma verticală a planului*** pe planele de proiecție şi se notează cu ***Ph*** şi ***Pv*** (figura 4.1,a).
Cele trei plane concurente ***P, H*** şi ***V*** se intersectează două câte două după trei drepte, ***Ph, Ox*** şi ***Pv***, care se întâlnesc în punctul de concurență al celor trei plane, notat cu ***Px***.

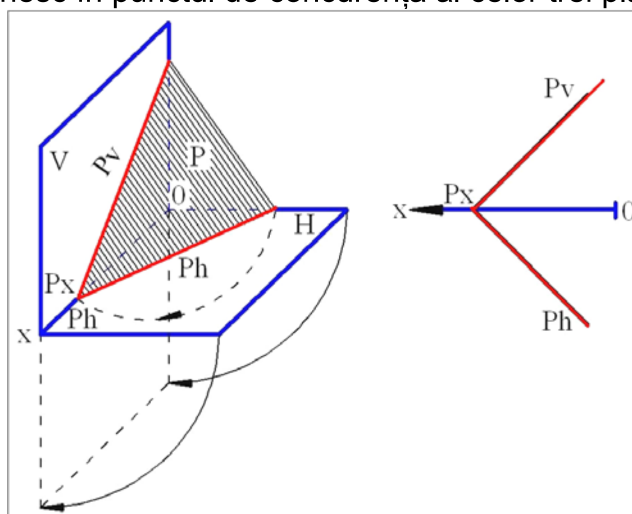


Fig.4.1.a)b) Urmele planului P.

În epură (figura 4.1,b), urma orizontală a planului, are proiecția orizontală ***Ph*** pe planul ***H***, iar proiecția verticală pe linia pământului. Analog, urma verticală are proiecția verticală în ***Pv*** pe planul ***V***, iar proiecția orizontală pe linia pământului.

Pentru simplificarea notațiilor nu se mai notează în epură şi proiecțiile urmelor de pe linia ***Ox***. Acest lucru trebuie reținut, deoarece dacă se compară epura unui plan oarecare ***P*** (figura 4.2,a) cu aceea a unei drepte ***D*** ce trece prin linia pământului (figura 4.2,b), se vede că acestea se deosebesc numai prin notații şi deci se pot uşor confunda. Nu trebuie uitat că urmele unui plan sunt două drepte distincte, conținute în acesta şi deci cele două proiecții ***Ph*** şi ***Pv*** prin care sunt reprezentate în epură nu corespund.

Rezultă că un punct de pe urma ***Ph*** are proiecția orizontală ***m1*** pe ***Ph*** şi cea verticală ***m1'*** pe ***Ox***, după cum un punct aparținând urmei ***Pv*** are proiecția verticală ***m2'*** pe ***Pv*** şi cea orizontală ***m2*** pe ***Ox***, în timp ce punctul de pe dreapta ***d, d'***, ce trece prin linia ***Ox***, are proiecția verticală ***m'*** pe ***d'*** şi cea orizontală ***m*** pe ***d***.

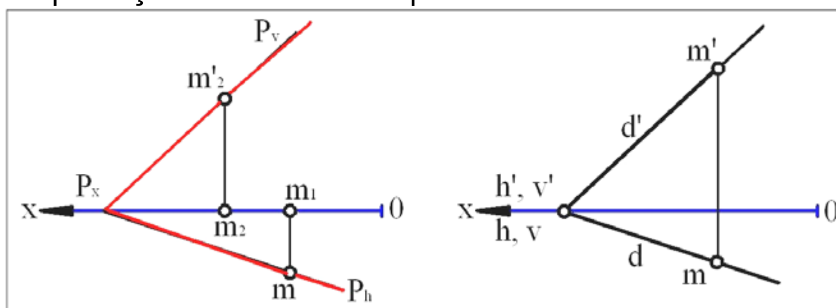


Fig.4.2.a)b). Punctul M pe urma planului P şi pe dreapta D.

Determinarea urmelor unui plan.

Urmele unui plan pot fi construite în epură şi dacă planul este dat prin două drepte concurente, două drepte paralele sau oricare alte elemente care îl determină.

Astfel, fie ***d1, d1'*** şi ***d2, d2'*** (figura 4.3) ***două drepte concurente care determină un plan P***. Se construiesc întâi urmele orizontale ***h1, h1'*** şi ***h2, h2'*** şi urmele verticale ***v1, v1'*** şi ***v2, v2'*** ale celor două drepte date. Dacă se unesc între ele urmele de acelaşi nume, se obțin două drepte ***h1h2***, ***h1'h2'*** şi ***v1v2***, ***v1'v2'*** care se sprijină pe cele două drepte date şi deci sunt în planul lor. Dar dreptele ***H1H2*** şi ***V1V2*** sunt în acelaşi timp şi în planul ***H*** respectiv ***V***, deoarece au fiecare câte două puncte aparținând acestor plane; rezultă că ele sunt chiar urmele ***Ph*** şi ***Pv*** ale planului. Construcția grafică este bine executată dacă cele două urme aflate se întâlnesc într-un punct ***Px*** pe linia pământului.

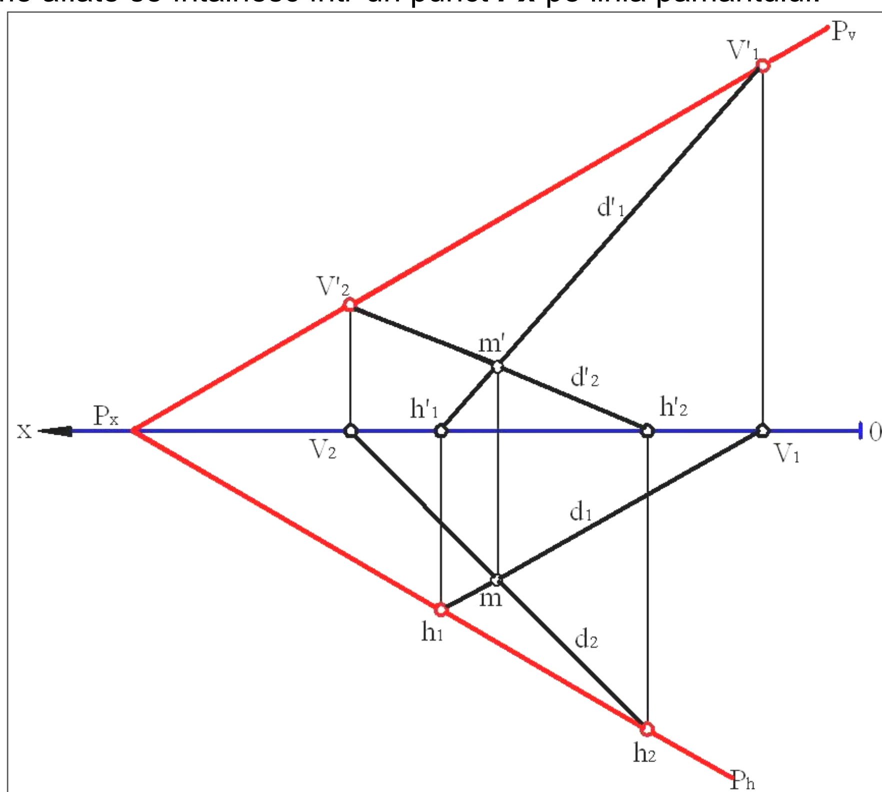


Fig.4.3. Determinarea urmelor planului P.

Dacă planul P este definit prin două drepte paralele, metoda care conduce la aflarea urmelor planului este aceeaşi. Se caută urmele dreptelor şi prin acestea se duc urmele planului.

Dacă planul este dat printr-o dreaptă şi un punct exterior ei sau ***prin trei puncte necoliniare,*** problema aflării urmelor planului se poate reduce la una din cele două menționate. În primul caz, prin punctul dat se duce o dreaptă concurentă sau paralelă cu dreapta dată; în cel de-al doilea, se unesc între ele două din punctele date şi se obține o dreaptă, iar prin al treilea se duce a doua dreaptă, fie concurentă, fie paralelă cu prima.

Urma unui plan oarecare pe planul lateral de proiecție poate fi determinată dacă se cunosc urmele pe planul orizontal şi planul vertical de proiecție.

Fie dat planul oarecare ***P*** (figura 4.4,a,b). Dacă se prelungesc urmele ***Ph*** şi ***Pv***, până când intersectează planul ***L***, se obțin punctele ***Py*** respectiv ***Pz*** care, fiind în acelaşi timp în planul ***P*** şi în planul ***L*** vor determina dreapta de intersecție a celor două plane, adică urma laterală ***Pl*** a planului ***P***.

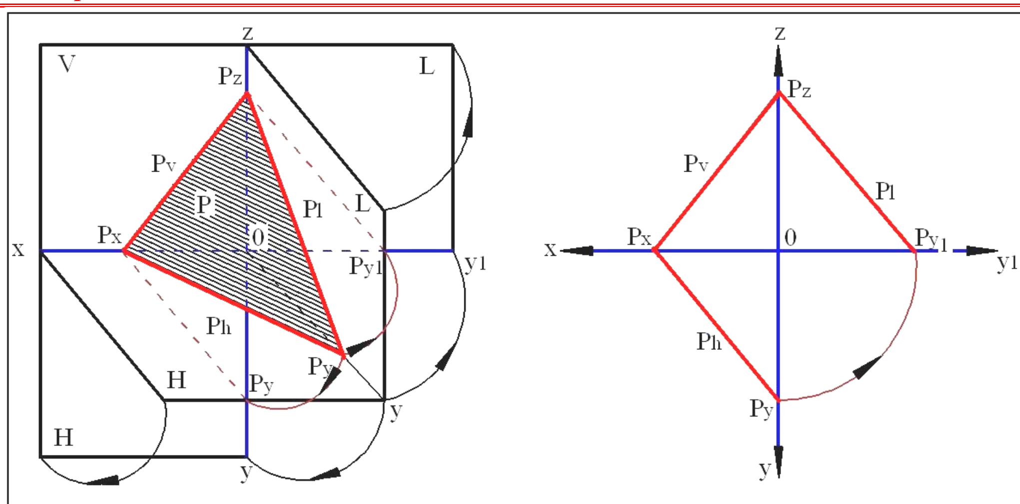


Fig.4.4. a),b).Urma laterală a planului P în triedru şi epură.

4.2. Drepte conținute în plan

4.2.1. Dreaptă oarecare.

Condiția necesară şi suficientă ca o dreaptă oarecare să aparțină unui plan dat este ca urmele dreptei să se afle pe urmele de acelaşi nume ale planului.

Fie ***P*** planul dat (figura 4.5,a) şi ***D*** dreapta oarecare conținută în plan. Dacă dreapta ***D*** este conținută în planul ***P***, rezultă că toate punctele ei sunt conținute în acest plan şi deci, şi cele două urme ***h, h'*** şi ***v, v'***. Urma ***h, h'*** este un punct de pe dreaptă cuprins atât în planul ***P*** cât şi în planul ***H*** şi deci se află pe dreapta după care se intersectează cele două plane, adică pe urma ***Ph*** a planului ***P***. În mod analog, urma ***v, v'***, fiind un punct de pe dreaptă cuprins simultan în planul ***P*** şi planul ***V***, nu poate fi decât pe urma ***Pv*** a planului ***P***.

Pentru a construi deci în epură (figura 4.5, b) o dreaptă oarecare ***d, d'*** conținută într-un plan ***P*** dat prin urmele lui ***Ph*** şi ***Pv***, se ia urma ***h, h'*** a dreptei pe urma ***Ph*** a planului şi urma ***v, v'*** pe ***Pv***; se unesc apoi ***h*** cu ***v*** şi ***h'*** cu ***v'*** şi se obțin cele două proiecții ale dreptei.

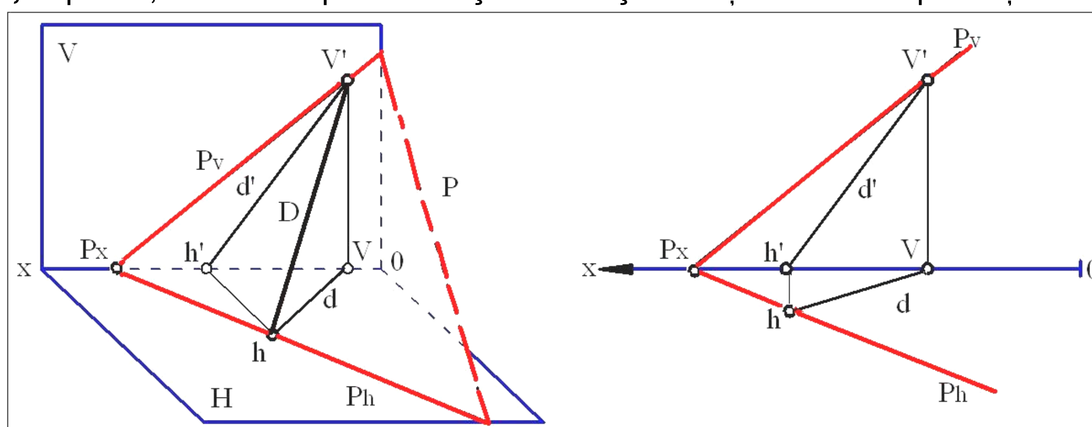


Fig.4.5. Dreaptă oarecare.

4.2.2. Drepte particulare ale planului

Orizontala sau dreapta de nivel a planului este o dreaptă conținută în planul ***P*** şi paralelă cu planul orizontal de proiecție (figura 4.6). Proiecțiile ***d', d''*** ale orizontalei din plan sunt paralele cu linia de pământ, iar proiecția orizontală ***d*** este paralelă cu urma orizontală ***Ph*** a planului ***P***. Unghiul ***β*** este unghiul pe care dreapta de nivel ***D (d, d', d'')*** îl face cu planul vertical de proiecție.

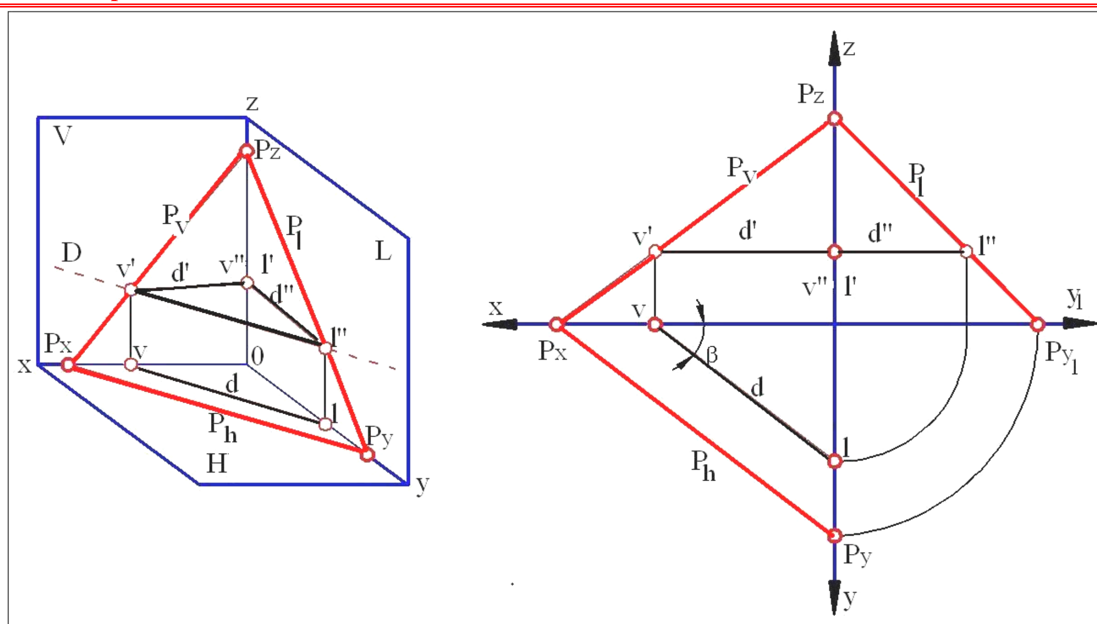


Fig.4.6. Dreapta de nivel D a planului P.

Frontala sau dreapta de front a planului este o dreaptă ***D (d,d',d'')*** conținută în planul ***Q*** şi paralelă cu planul vertical de proiecție (figura 4.7). Ea are proiecția orizontală ***d*** paralelă cu linia de pământ, proiecția verticală ***d'*** paralelă cu urma verticală a planului ***Qv,*** iar proiecția laterală ***d''*** perpendiculară pe ***Ox***.
Unghiul ***α*** este unghiul pe care frontala îl formează cu planul orizontal de proiecție.

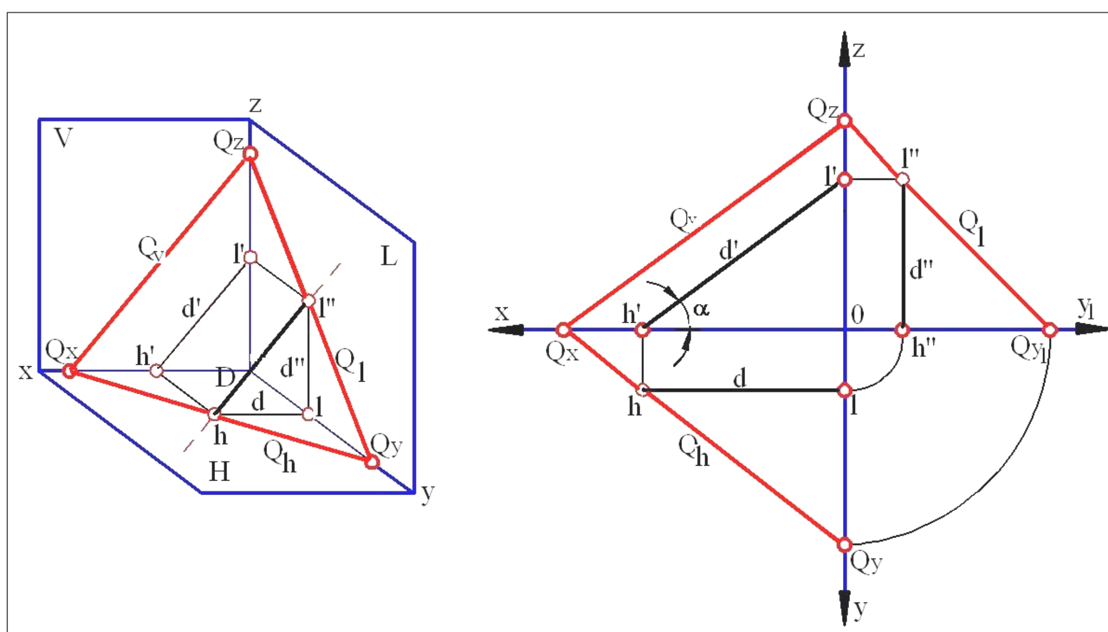


Fig.4.7.Dreapta de front D a planului Q

Dreapta de profil conținută în planul R este în acelaşi timp paralelă cu planul lateral de proiecție (fig.4.8). Proiecțiile sale d şi d' sunt în prelungire şi perpendiculare pe Ox, iar proiecția laterală d'' este paralelă cu urma laterală a planului. Unghiurile α şi β sunt unghiurile pe care dreapta le face cu planul orizontal şi respectiv vertical de proiecție.

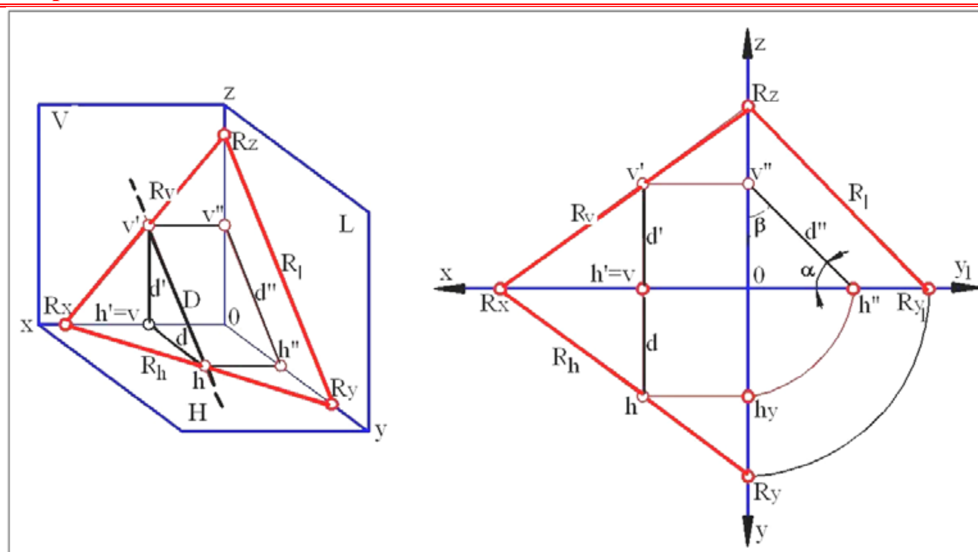


Fig.4.8. Dreapta de profil D a planului R

4.2.3. Drepte de cea mai mare pantă ale planului (d.d.c.m.m.p.)

*Se numeşte dreaptă de cea mai mare pantă a unui plan **P** față de planul **H** dreapta **T** cuprinsă în planul **P**, perpendiculară pe toate orizontalele planului şi deci implicit şi pe urma **Ph** a acestuia* (figura 4.9, a).

Pentru a construi în epură (figura 4.9,b) ***d.d.c.m.m.p.*** a planului dat ***Ph, Pv*** față de planul ***H*** se porneşte de la proiecția ei orizontală ***hv***, care se duce perpendiculară pe urma ***Ph***, deoarece unghiul de 90° pe care ***d.d.c.m.m.p.*** îl face cu oricare din orizontalele planului, se proiectează în adevărată mărime pe planul ***H***. După ce se duce proiecția ***hv*** perpendiculară pe ***Ph***, se pune condiția ca dreapta să fie cuprinsă în plan: cu ajutorul liniilor de ordine ridicate din ***h*** şi ***v*** se determină ***h'*** şi ***v'***, la intersecția cu ***Ox*** respectiv ***Pv*** şi cu acestea proiecția ***h'v'*** a dreptei.

Proprietățile d.d.c.m.m.p. a unui plan față de planul ***H*** sunt următoarele:

a) Deoarece atât ***d.d.c.m.m.p. (T)*** cât şi proiecția ei ***(t)*** pe planul ***H*** sunt perpendiculare pe urma ***Ph*** a planului, rezultă că planul determinat de ele (haşurat în schiță) este şi el perpendicular pe ***Ph*** şi implicit, pe planele ***P*** şi ***H***. Rezultă că *unghiul diedru format de planul **P** cu planul orizontal de proiecție **H** are ca măsură unghiul plan **δ** cuprins între **d.d.c.m.m.p**. şi proiecția ei pe planul **H**.*

Dreapta d.c.m.m.p. față de planul H este deci dreapta cu cea mai mare înclinare *(δ) față de planul H*, care se poate duce în planul ***P***. Ea are şi o semnificație fizică: picăturile de ploaie care se scurg pe fața unui acoperiş spre jgheab urmează d.d.c.m.m.p. a acoperişului, etc.

b) Dreapta d.c.m.m.p. a unui plan P față de planul H, determină complet planul.

Fie ***t,t'*** proiecțiile unei drepte oarecare considerată ***d.d.c.m.m.p.*** a unui plan ***P*** față de planul ***H*** (figura 4.9.b). Pentru a determina urmele planului se duce întâi urma ***Ph***, perpendiculară pe ***t*** prin ***h*** şi, la intersecția cu ***Ox***, se află ***Px***. Urma ***Pv*** trebuie să treacă prin ***Px***, dar şi prin ***v'***, deoarece ***d.d.c.m.m.p.*** este o dreaptă aparținând planului. Întrucât atât ***Ph*** cât şi ***Pv*** astfel aflate au poziții unice în epură, rezultă că ***d.d.c.m.m.p.*** față de planul ***H*** determină complet planul ***P***.

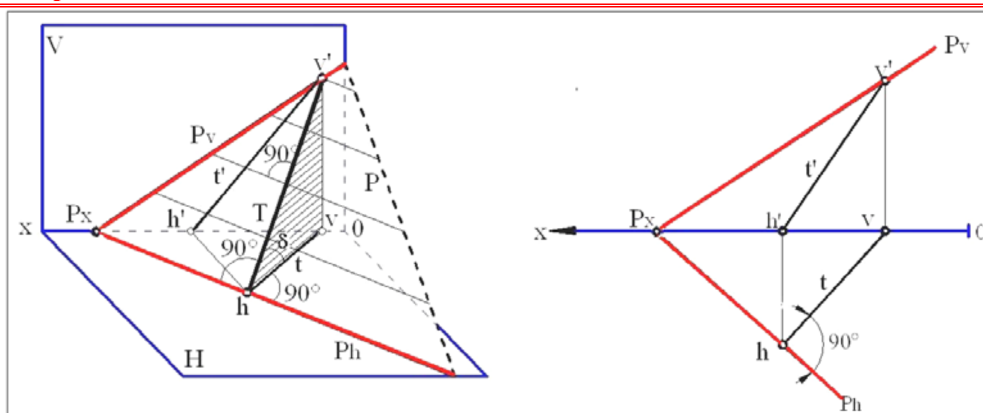


Fig.4.9. a),b) Dreapta de cea mai mare pantă față de planul orizontal

Prin analogie, se poate reprezenta şi ***d.d.c.m.m.p. a planului în raport cu planul vertical*** de proiecție, şi anume dreapta cuprinsă în plan, perpendiculară pe toate frontalele planului. Rezultă proprietăți similare raportate în acest caz la planul vertical de proiecție.

În figura 4.10.a,b este reprezentată în schița şi epură ***d.d.c.m.m.p.*** a unui plan oarecare ***P*** față de planul ***V***. De reținut: proiecția verticală ***t'*** a dreptei este perpendiculara pe urma verticală ***Pv*** a planului.

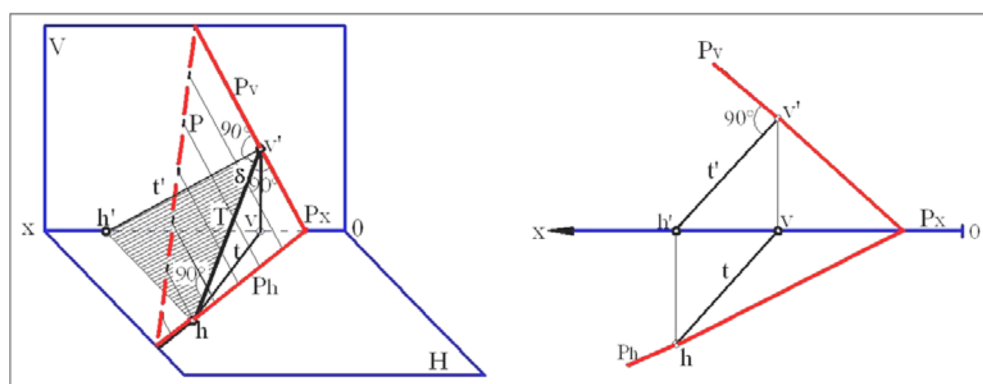


Fig.4.10. Dreapta de cea mai mare pantă față de planul vertical

4.3. Punct conținut în plan

Pentru ca un punct să fie conținut într-un plan este suficient să fie aşezat pe o dreaptă a planului.

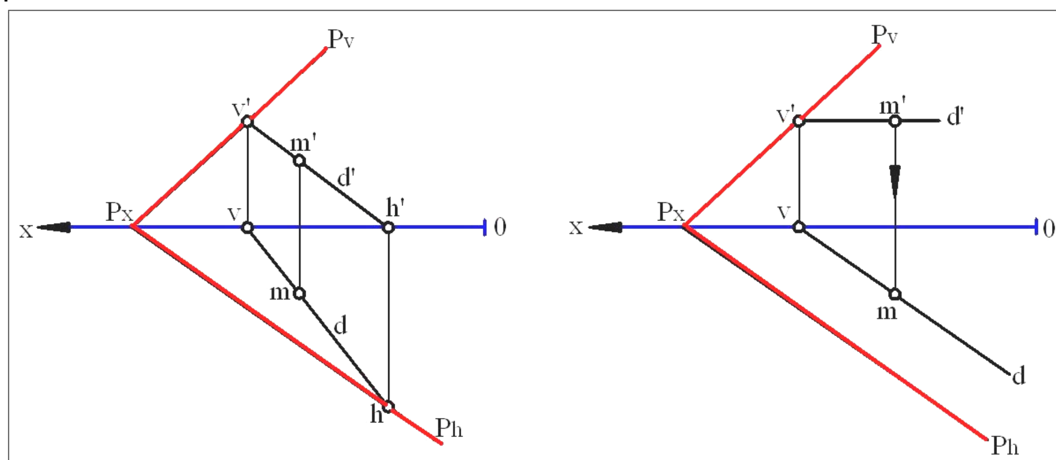


Fig.4.11.Punctul M pe dreapta oarecare D.   Fig.4.12.Punctul M pe dreapta orizontală D

Pentru a construi în epură (figura 4.11.) proiecțiile unui punct oarecare ***m, m'*** care aparține planului ***Ph, Pv***, se duce întâi o dreaptă oarecare ***d, d'*** cuprinsă în plan şi se aşează apoi proiecțiile punctului pe proiecțiile de acelaşi nume ale dreptei.
Dacă se dă una din proiecțiile punctului căutat, de exemplu cea verticală, şi se cere să se determine cealaltă proiecție punând condiția ca punctul să aparțină planului dat, se urmează calea indicată mai sus, cu specificarea că trebuie dusă întâi proiecția verticală a dreptei aparținând planului prin proiecția verticală a punctului.
De cele mai multe ori, pentru a obține o simplificare a construcțiilor grafice, dreapta pe care se aşează punctul se ia fie o orizontală, fie o frontală a planului.

Astfel, fie ***Ph, Pv*** planul dat (figura 4.12) şi ***m'*** proiecția verticală a punctului ce trebuie aşezat în plan. Se duce întâi proiecția verticală ***d'*** a unei orizontale a planului trecând prin proiecția ***m'*** a punctului; după ce s-a determinat proiecția ***d*** a dreptei punând condiția ca aceasta să fie cuprinsă în planul ***Ph Pv***, se obține la intersecția liniei de ordine coborâtă din ***m'*** cu ***d***, proiecția orizontală ***m*** căutată.

4.4. Plane în poziții particulare față de planele de proiecție

4.4.1. Plane perpendiculare pe planele de proiecție

a. Planul vertical este un plan perpendicular pe planul orizontal de proiecție şi deci, implicit, proiectant față de acesta.

Fie ***P*** un plan vertical oarecare, de urme ***Ph*** şi ***Pv*** (figura 4.13.a). Deoarece atât ***P*** cât şi ***V*** sunt perpendiculare pe ***H***, dreapta lor de intersecție, urma ***Pv***, trebuie să fie perpendiculară pe ***H*** şi deci şi pe ***Ox***, care este o dreaptă cuprinsă în ***H***. Rezultă deci că în epură (figura 4.13.b) urma ***Pv*** a planului vertical va trebui dusă perpendicular pe linia pământului.Planul vertical ***P*** fiind proiectant față de ***H***, orice punct ***M*** cuprins în planul ***P*** va avea proiecția orizontală ***m*** pe urma orizontală a planului. De asemenea, orice dreaptă, linie curbă sau figură plană (triunghi, cerc, etc.), situată într-un plan vertical, se proiectează orizontal chiar pe urma orizontală ***Ph*** a planului, deci proiecțiile lor orizontale se reduc la o linie dreaptă, urma ***Ph***.

Deoarece atât planul ***P*** cât şi planul ***V*** sunt perpendiculare pe ***H***, rezultă că unghiul diedru al celor două plane, ***P*** şi ***V***, poate fi măsurat în adevărată mărime în ***α*** pe planul ***H***, fiind determinat de ***Ph*** şi ***Ox***.

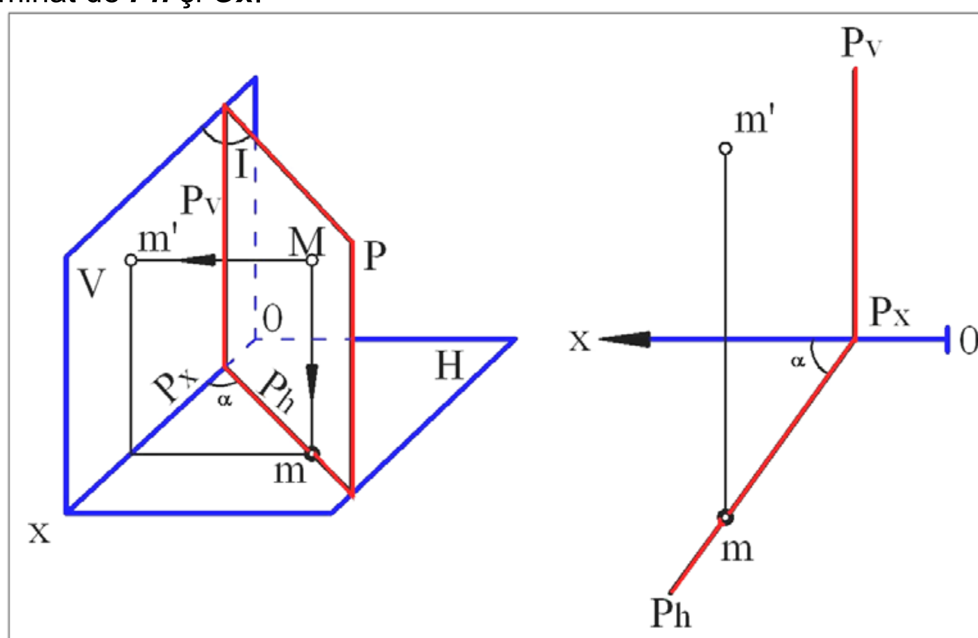


Fig.4.13.Planul vertical P.

b. Planul de capăt R este un plan perpendicular pe planul vertical de proiecție şi deci proiectant față de acesta.

Prin analogie cu planul vertical, urmărind acelaşi raționament, rezultă în ceea ce priveşte planul de capăt ***R*** (figura 4.14. a.b.):

- urma orizontală ***Rh*** a planului de capăt este perpendiculară pe linia pământului;
- un punct oarecare cuprins într-un plan de capăt şi deci orice figură plană în această situație se proiectează pe planul ***V*** chiar pe urma verticală ***Rv*** a planului;
- unghiul diedru al planelor ***R*** şi ***H*** se măsoară în adevărată mărime în planul ***V***, fiind determinat de ***Rv*** şi ***Ox***.

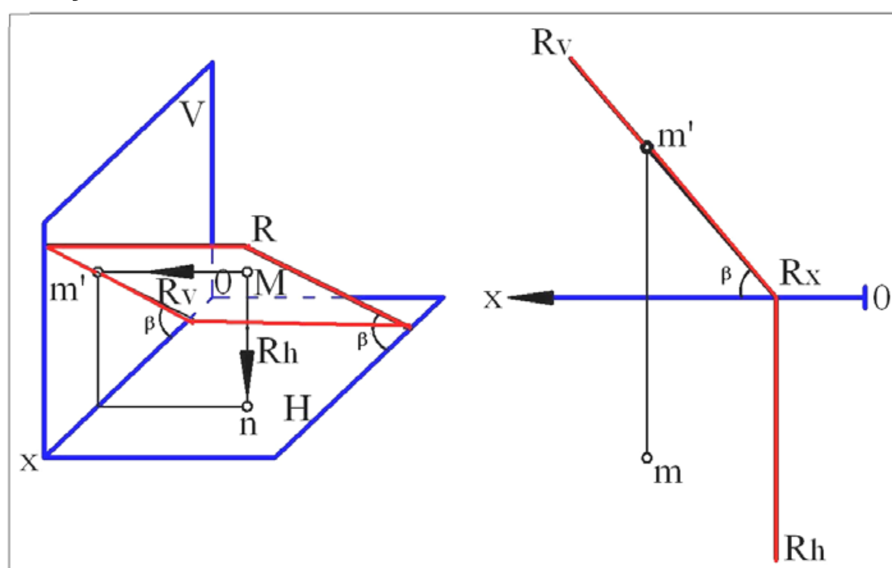


Fig.4.14. Planul de capăt R.

c. Plan paralel cu linia pământului.

Planul ***Q*** este un plan perpendicular pe planul lateral ***L***, fiind paralel cu linia pământului (figura 4.15.a.b). Rezultă că cele două urme ***Qh*** şi ***Qv*** trebuie să fie paralele cu ***Ox***. Orice punct ***M*** cuprins într-un plan paralel cu ***Ox*** se proiectează deci pe planul ***L*** pe urma laterală ***Ql*** a planului.

Proiecțiile ***m, m'*** ale unui punct ***M*** cuprins într-un plan ***Q*** paralel cu ***Ox*** se determină fie pe calea obişnuită aşezând punctul pe o dreaptă oarecare aparținând planului, fie pornind de la proiecția laterală ***m"*** (care se găseşte pe urma ***Ql***), cu ajutorul construcțiilor grafice cunoscute.

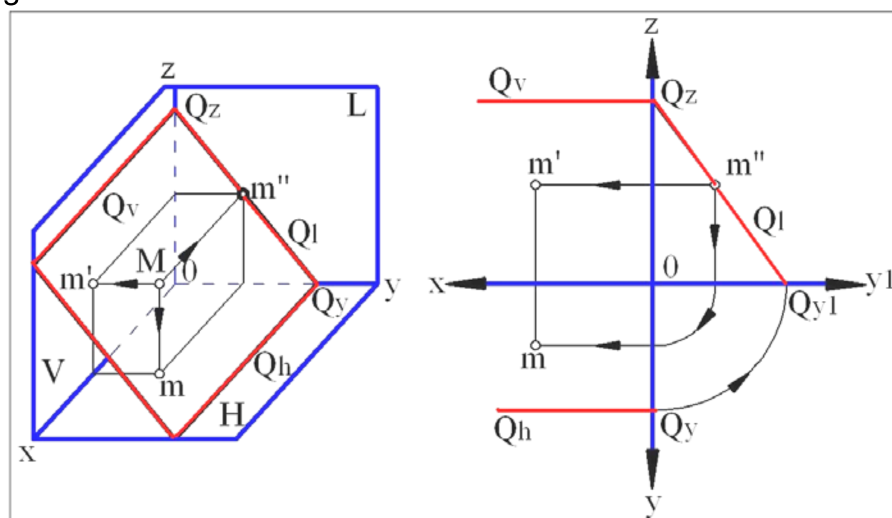


Fig. 4.15.Planul Q perpendicular pe planul lateral

d. Plan care trece prin linia pământului.

Planul axial (figura 4.16. a.b) este un plan care trece prin axa ***Ox***. Ca şi planul paralel cu linia pământului, planul axial ***U*** fiind perpendicular pe planul lateral ***L***, este proiectant față de acesta.

Planul axial are ambele urme, ***Uh*** şi ***Uv***, confundate cu ***Ox***, deci reduse la o singură dreaptă; aceasta face ca planul să nu poată fi determinat prin urmele sale ***Uh*** şi ***Uv***. Pentru a-l defini se recurge fie la urma ***Ul***, fie la un punct suplimentar cuprins în plan şi reprezentat în epură o dată cu urmele ***Uh*** şi ***Uv***.

Un punct oarecare ***M*** cuprins într-un plan axial se proiectează pe urma laterala ***Ul*** a planului, în ***m"***. Urma laterală ***Ul*** a planului axial trece prin originea ***O***.

Cele două plane bisectoare ***B1*** şi ***B2***, nu sunt altceva decât plane axiale în poziții particulare.

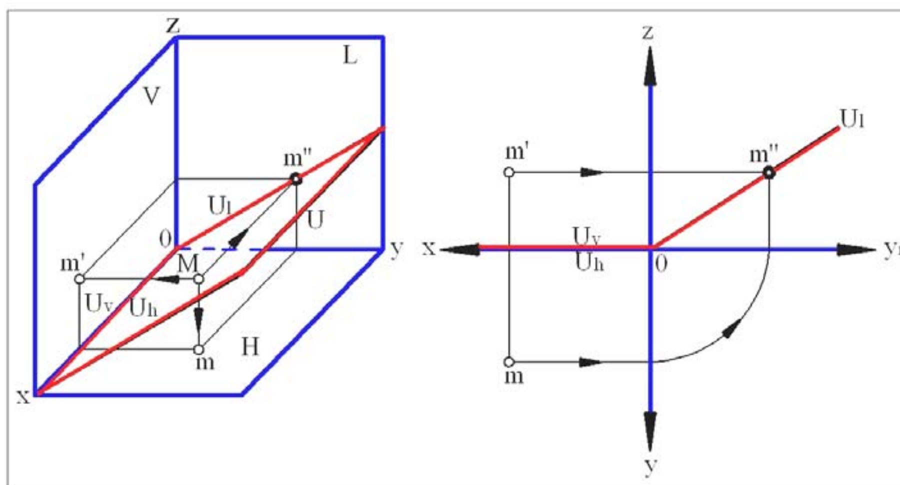


Fig.4.16.Planul axial U .

4.4.2. Plane paralele cu planele de proiecție

a. Planul orizontal sau de nivel (figura 4.17.a.b) este un plan paralel cu planul orizontal de proiecție; fiind în acelaşi timp şi perpendicular pe planul vertical de proiecție, rezultă că este, de fapt un plan de capăt într-o poziție particulară.

Planul de nivel ***S*** nu are urmă orizontală, întrucât este paralel cu ***H***. Urma verticală ***Sv*** este paralelă cu ***Ox***, deoarece cele două plane paralele, ***S*** şi ***H***, se intersectează cu ***V*** după două drepte paralele, ***Sv*** respectiv ***Ox***.

Planul de nivel, fiind proiectant față de ***V***, rezultă că orice punct ***M*** cuprins în plan are proiecția verticală ***m'*** pe urma verticală ***Sv*** a planului.

Planul de nivel fiind paralel cu planul ***H***, orice element geometric cuprins în plan se proiectează pe planul ***H*** în adevărată mărime.

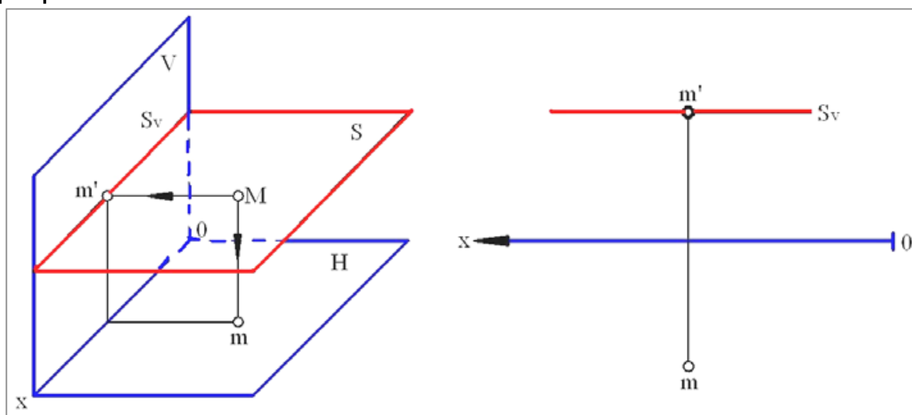


Fig.4.17. Planul de nivel S.

b. Planul de front (figura 4.18) este un plan paralel cu planul vertical de proiecție şi deci perpendicular pe planul orizontal de proiecție, adică de fapt un plan vertical într-o poziție particulară. El are o singură urmă orizontală ***Th***, care este paralelă cu ***Ox***.

Orice element geometric cuprins într-un plan de front se proiectează în adevărată mărime pe planul ***V*** şi după urma orizontală ***Th*** pe planul ***H***.

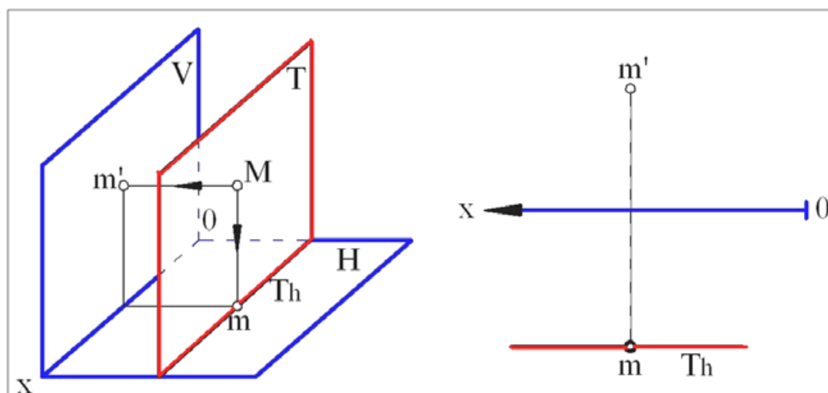


Fig. 4.18. Planul de front T.

c. Planul de profil *W* (figura 4.19) este un plan paralel cu planul lateral *L*, deci orice element cuprins în planul de profil se proiectează în adevărată mărime pe planul *L*.

Planul de profil este în acelaşi timp şi un plan perpendicular pe ambele plane de proiecție ***H,V***, deci şi pe linia lor de intersecție ***Ox***. Rezultă că planul de profil prezintă atât particularitățile planului vertical cât şi cele ale planului de capăt.

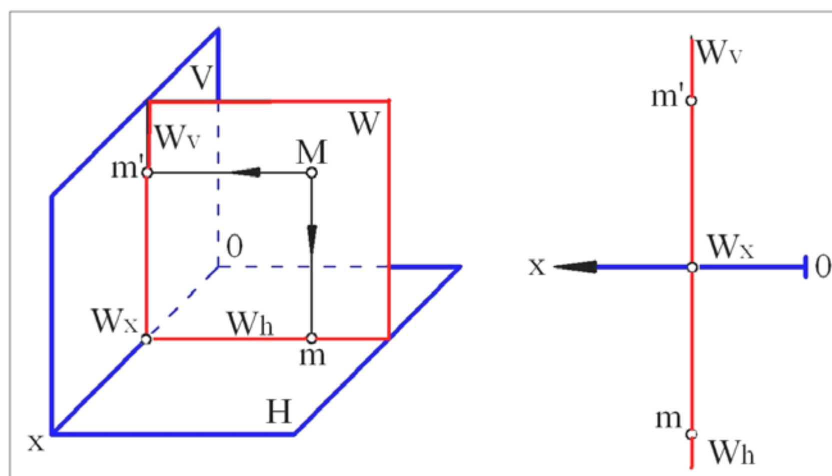


Fig. 4.19. Planul de profil W.

4.5. Pozițiile relative a două plane

Două plane pot fi unul față de celălalt, fie paralele, fie concurente.

a. Plane paralele.

Două plane paralele între ele în spațiu au urmele lor de acelaşi nume, paralele între ele în epură. Într-adevăr, două plane paralele se intersectează cu un al treilea plan după două drepte paralele. Rezultă că urmele de acelaşi nume a două plane paralele, adică de fapt dreptele după care acestea se intersectează cu planele ***H*** şi ***V*** (figura 4.20.), trebuie să fie paralele între ele. Reciproca acestei teoreme este şi ea adevărată: *dacă urmele de acelaşi nume a două plane sunt paralele între ele, cele două plane reprezentate în epură sunt paralele între ele în spațiu.*

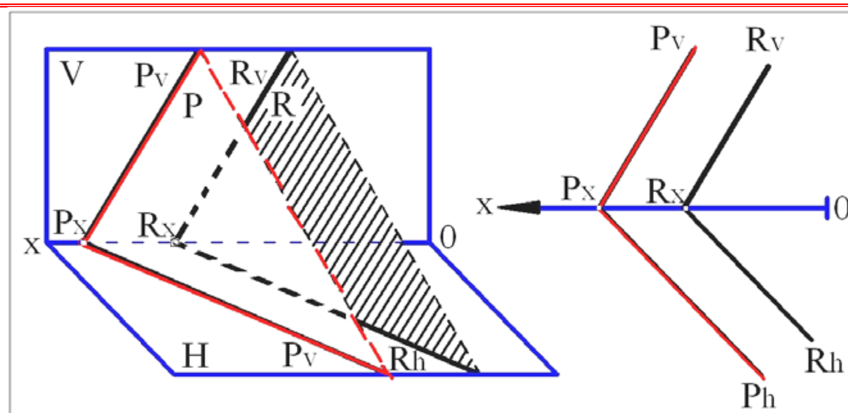


Fig. 4.20. Două plane P şi R paralele.

În cazul planelor paralele cu linia pământului, paralelismul urmelor trebuie verificat şi pe planul lateral ***L***. Într-adevăr, deşi în epură (figura 4.21,a,b) urmele orizontale ***Sh*** şi ***Th*** a două plane ***S*** şi ***T*** paralele cu ***Ox*** sunt paralele între ele ca şi cele verticale ***Sv*** şi ***Tv***, totuşi cele două plane nu sunt paralele între ele în spaţiu, deoarece urmele ***Sl*** şi ***Tl*** ale celor două plane pe planul ***L*** nu sunt paralele.

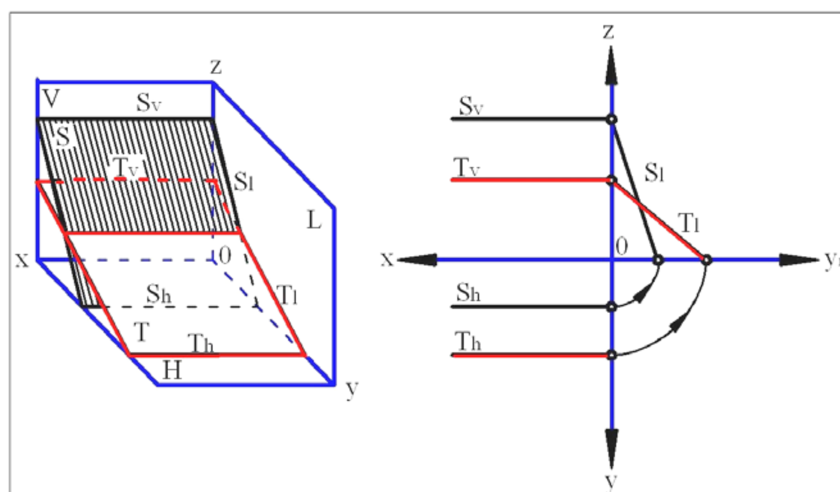


Fig.4.21. Două plane S şi T neparalele.

b. Plane concurente.

Două plane concurente se intersectează după o dreaptă (figura 4.22.).

Pentru ca dreapta de intersecţie să fie determinată este suficient să se cunoască două puncte ale ei. Dacă cele două plane sunt date prin urmele lor, atunci punctele care definesc dreapta pot fi chiar punctele după care se intersectează urmele de acelaşi nume ale celor două plane. Într-adevăr, urmele ***Ph*** şi ***Rh*** a două plane oarecare ***P*** şi ***R*** se găsesc în planul ***H*** şi deci se intersectează în ***h, h'***. Punctul ***h, h'***, fiind comun celor două plane, se găseşte pe dreapta lor de intersecţie. Un raţionament analog conduce la determinarea celui de-al doilea punct ***v, v'*** al dreptei, la intersecţia urmelor ***Pv*** şi ***Rv***.

Punctele ***h, h'*** şi ***v, v'*** sunt chiar urmele dreptei de intersecţie, deoarece aceasta fiind cuprinsă în acelaşi timp în cele două plane, trebuie să aibă urmele ei pe urmele de acelaşi nume ale ambelor plane, deci la intersecţia lor. În epură, după ce s-au determinat cele două puncte ***h, h'*** şi ***v, v'*** la intersecţia urmelor ***Ph*** cu ***Rh***, respectiv ***Pv*** cu ***Rv***, se unesc între ele punctele ***h*** cu ***v*** şi ***h'*** cu ***v'*** şi se obţin cele două proiecţii ***hv*** şi ***h'v'*** ale dreptei de intersecţie.

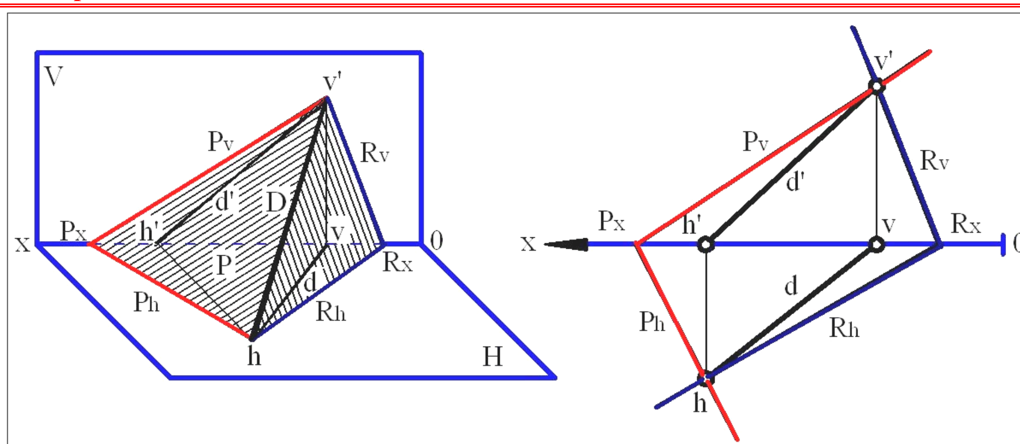


Fig.4.22. Două plane P şi R oarecare, concurente.

Dacă unul din cele două plane care se intersectează este *un plan de nivel* ***N,*** atunci dreapta de intersecție este o orizontală (fig. 4.23).

Un plan oarecare ***P*** se intersectează cu un *plan de front* ***F*** după o dreaptă frontală ale cărei proiecții se determină ca în figura 4.24.

Un plan vertical ***Q*** (figura 4.25) se intersectează cu un plan oarecare ***P***, după o dreaptă a cărei proiecție orizontală ***hv*** este confundată cu urma orizontală ***Qh*** a planului vertical, deoarece dreapta de intersecție este cuprinsă în planul ***Q***, care este proiectant față de ***H.***

Un plan de capăt ***T*** intersectat cu un plan oarecare ***P*** are dreapta de intersecție cu proiecția verticală ***h'v'*** pe urma verticală ***Tv*** a planului de capăt ***T*** (figura 4.26).

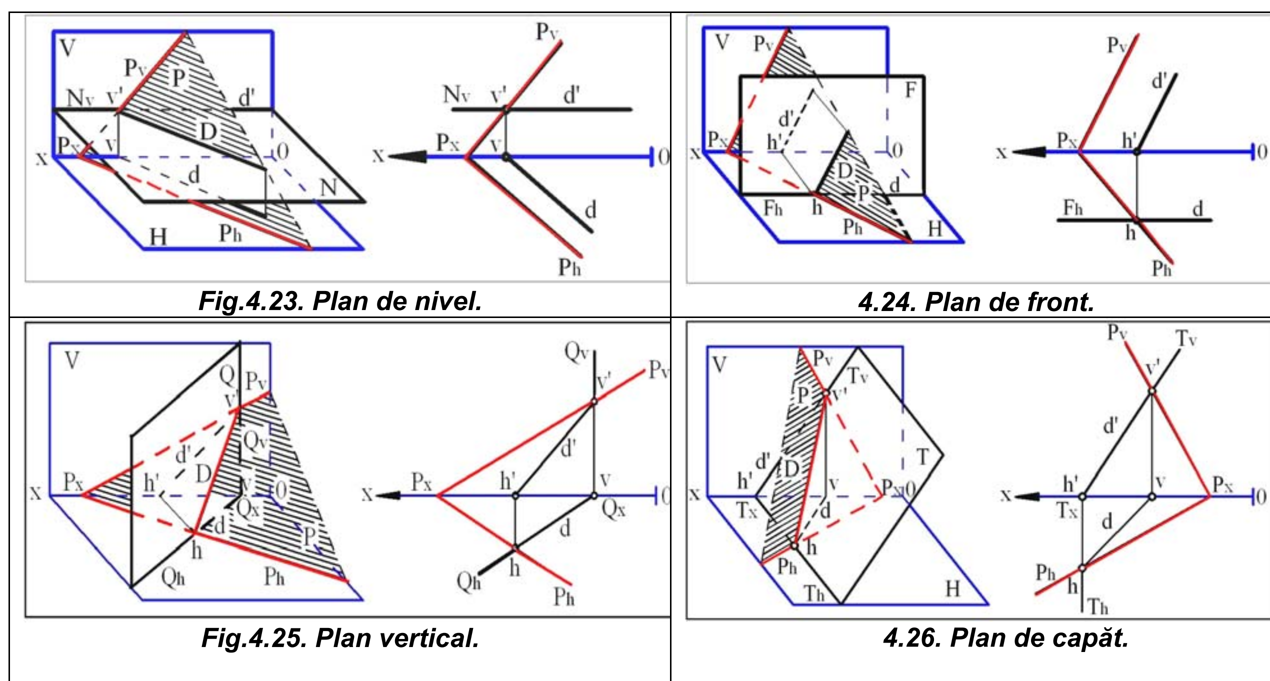


Fig.4.23. Plan de nivel.

4.24. Plan de front.

Fig.4.25. Plan vertical.

4.26. Plan de capăt.

4.6. Pozițiile relative ale dreptei față de plan

Față de un plan oarecare, o dreaptă poate ocupa una din următoarele poziții:
- cuprinsă în plan, când toate punctele dreptei aparțin planului;
- paralelă cu planul, când nici un punct al dreptei nu aparține planului;
- oarecare față de plan, când dreapta şi planul au un singur punct comun, punctul în care dreapta intersectează planul.

Întrucât prima categorie de drepte a fost studiată anterior, în cele ce urmează se vor trata numai următoarele două. La categoria dreptelor oarecare față de plan se va studia separat cazul particular al dreptei perpendiculare pe plan, deoarece prezintă anumite particularități.

a. Dreaptă paralelă cu un plan.

Paralelismul dintre o dreaptă şi un plan se poate reduce la paralelismul a două drepte. *O dreaptă este paralelă cu un plan (figura 4.27) dacă este paralelă cu o dreaptă cuprinsă în acel plan*. În consecință, pentru a duce o dreaptă paralelă cu un plan dat, se duce întâi o dreaptă oarecare aparținând planului şi apoi o dreaptă exterioară planului, paralelă cu cea cuprinsă în plan.

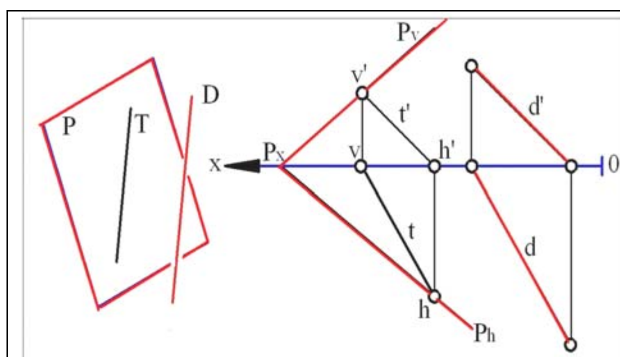


Fig. 4.27. Dreapta D paralelă cu planul P.

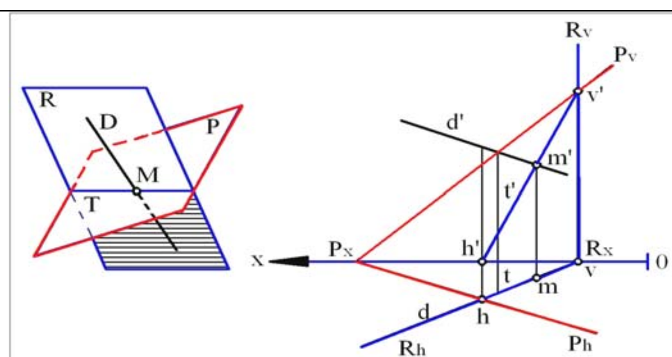


Fig. 4.28.Dreapta D intersectează planul P.

În epură, (figura 4.27.b), pentru a duce o dreaptă paralelă cu planul ***Ph, Pv***, se duce întâi o dreaptă oarecare ***t, t'*** aparținând planului (urmele dreptei pe urmele de acelaşi nume ale planului) şi apoi dreapta ***d, d'*** paralelă cu aceasta (***d*** paralelă cu ***t*** şi ***d'*** paralelă, cu ***t'***). Dreapta ***d, d'*** este paralelă cu planul ***Ph, Pv***.

Dacă se cere să se ducă un plan paralel cu o dreaptă dată se va duce întâi o dreaptă paralelă, cu cea dată, şi prin aceasta planul cerut.

În epură (figura 4.27.b), fie ***d*** şi ***d'*** proiecțiile dreptei date. Se duce întâi dreapta ***t, t'***, paralelă cu ***d, d'***. Se determină urmele ***h, h'*** şi ***v, v'*** ale dreptei ***t, t'*** şi, dintr-un punct oarecare ***Px*** luat pe ***Ox***, se duc apoi urmele ***Ph*** şi ***Pv*** ale planului căutat prin urmele ***h, h'*** respectiv ***v, v'*** ale dreptei. Se observă că întrucât ***Px*** a fost luat arbitrar, problema are o infinitate de soluții.

b. Dreaptă oarecare față de un plan.

Problema intersecției unei drepte cu un plan se poate reduce la intersecția a două drepte. Fie ***D*** (figura 4.28.a) dreapta care intersectează într-un punct ***M*** un plan oarecare ***P***. Pentru a găsi punctul de intersecție ***M*** se procedează astfel:

- se duce întâi prin dreapta ***D*** un plan oarecare ***R***;
- se determină apoi dreapta de intersecție ***T*** a planului ***P*** cu planul ***R***;
- la intersecția dreptei date ***D*** cu dreapta ***T***, comună celor două plane ***P*** şi ***R***, se găseşte punctul căutat ***M***.

În epură (figura 4.28.b), fie ***Ph, Pv*** planul dat şi ***d, d'*** dreapta care intersectează planul.

Pentru a găsi punctul de intersecție ***m, m'*** se procedează astfel:

- Se duce întâi prin dreapta ***d, d'*** planul auxiliar ***Rh, Rv***. Pentru simplificarea construcțiilor grafice este avantajos să se ia ca plan auxiliar chiar unul din planele proiectante ale dreptei. În epura din figura 4.28,b s-a utilizat un plan vertical, în acest caz, urma orizontală ***Rh*** a planului trebuie dusă suprapusă peste proiecția ***d*** a dreptei (orice element conținut într-un plan vertical se proiectează orizontal pe urma orizontală a planului), iar urma ***Rv***, perpendiculară pe ***Ox***.
- Se determină apoi dreapta ***t, t'*** după care se intersectează planul ***Ph, Pv*** cu planul ***Rh***, ***Rv*** (urmele dreptei se obțin la intersecția urmelor de acelaşi nume ale celor două plane).

La intersecția lui ***d'*** cu ***t'*** se găseşte proiecția verticala ***m'*** a punctului căutat; cu ajutorul liniei de ordine coborâtă din ***m'*** pe ***d*** rezultă proiecția orizontală, ***m***.

Dacă planul ***Ph, Pv*** se consideră, opac, este evident că, în proiecția orizontală, va fi *văzută* numai porțiunea din dreapta, ***d, d'*** care se găseşte *deasupra* planului ***Ph, Pv***. Punctul ***m, m'*** comun dreptei şi planului, separă porțiunea văzută de cea nevăzută a dreptei. În mod analog în proiecția verticală va fi *văzută* numai porțiunea din dreapta ***d, d'***, care se află *în fața* planului ***Ph, Pv***.

Pentru a stabili porțiunile văzute şi nevăzute ale dreptei ***d, d'*** față de plan, în cele două proiecții, se cercetează pozițiile relative ale dreptei față de urmele planului cu ajutorul punctelor de intersecție aparentă dintre ***d*** şi ***Ph*** respectiv ***d'*** şi ***Pv***.

Porțiunea văzută din dreaptă se trasează cu linie plină, cea nevăzută, cu linie întreruptă.

Dacă planul cu care se intersectează dreapta nu este un plan oarecare, ci un plan proiectant față de unul din planele de proiecție, atunci punctul de intersecție se poate obține imediat fără nici o construcție auxiliară.

c. Dreaptă perpendiculară pe un plan.

O dreaptă este perpendiculară pe un plan, dacă este perpendiculară pe două drepte din acest plan.

În acest caz, perpendiculara ***D*** (figura 4.29.a), ridicată dintr-un punct ***M*** pe planul oarecare ***P***, este în acelaşi timp perpendiculară pe o orizontală ***T*** şi pe o frontală ***F***, duse în planul ***P*** prin punctul ***M***. Întrucât urma ***Ph*** este şi ea o orizontală a planului iar urma ***Pv*** o frontală a acestuia, rezultă că:

Dreapta perpendiculară pe un plan are proiecția ei orizontală perpendiculară pe urma orizontală a planului şi proiecția verticală perpendiculară pe urma verticală a planului.

În epură (figura 4.29.b), fie ***Ph, Pv*** planul dat şi ***m, m'*** un punct oarecare conținut în plan (este în plan deoarece s-a aşezat pe orizontala ***t, t'*** a planului).

Pentru a duce perpendiculara la plan în punctul ***m, m'***, se duce din ***m*** proiecția orizontală ***d*** a dreptei perpendiculară pe urma ***Ph*** şi proiecția verticală ***d'*** perpendiculară pe urma ***Pv*** a planului.

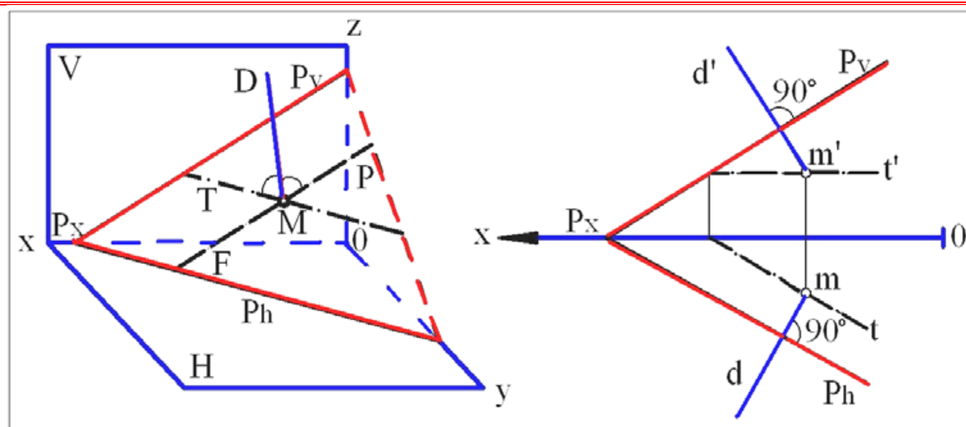


Fig. 4.29. Dreapta D perpendiculară pe planul P.

4.7. Aplicații

1) Se dau un plan oarecare P prin urmele lui Ph şi Pv, precum şi proiecția verticală d' a unei drepte. Se cere să se determine proiecția orizontală d a dreptei astfel ca dreapta să aparțină planului.
Rezolvare:

Pentru ca dreapta ***d, d'*** să aparțină planului ***Ph, Pv*** (figura 4.30), trebuie ca urmele ei să se găsească pe urmele de acelaşi nume ale planului. Prelungind pe ***d'***, se obține la intersecția cu ***Pv*** proiecția verticală ***v'*** a urmei verticale a dreptei, iar la intersecția cu ***Ox***, proiecția verticală ***h'*** a urmei orizontale a dreptei. Cu ajutorul liniilor de ordine duse prin ***v'*** şi ***h'***, se obțin la intersecția cu ***Ox***, respectiv ***Ph***, celelalte două proiecții, ***v*** respectiv ***h***, ale urmelor dreptei. Unind apoi pe ***v*** cu ***h*** se obține şi proiecția căutată ***d*** a dreptei.

Urmând convențiile stabilite în privința vizibilității, se trasează cu linii întrerupte proiecțiile dreptei între cele doua urme, precum şi urma orizontală, a planului între ***h*** şi ***Px***, care se găsesc în diedrul ***II***.

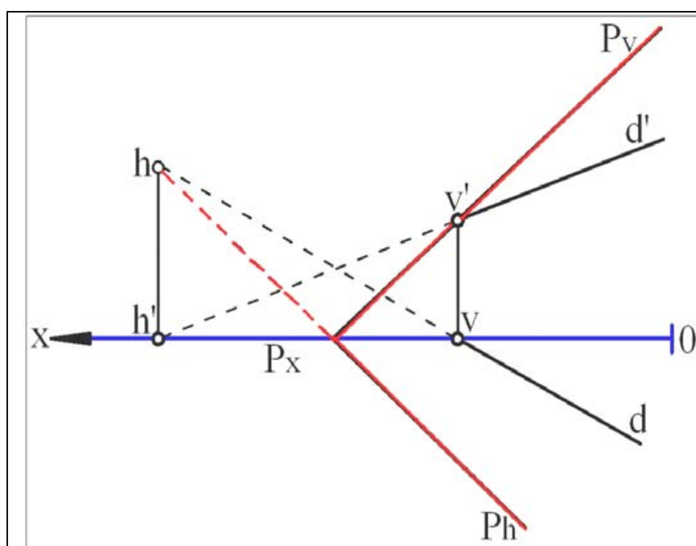


Fig. 4.30. Aplicația 1.

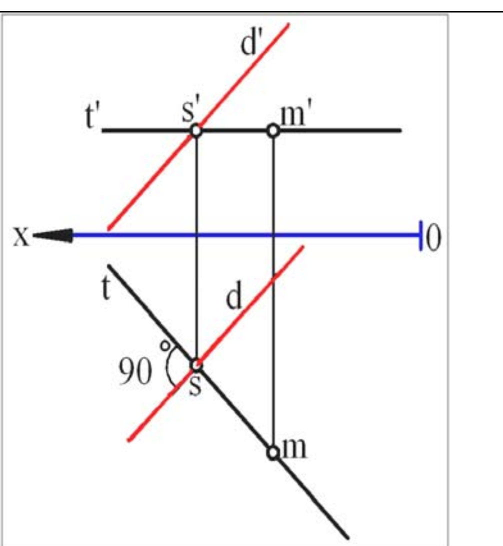


Fig. 4.31. Aplicația 2.

2) Se dau un plan prin d, d' dreapta lui d.c.m.m.p. față de planul orizontal de proiecție (figura 4.31.) precum şi proiecția orizontală m a unui punct conținut în plan. Se cere să se găsească proiecția verticală m' a punctului.

Rezolvare:

Pentru ca un punct să aparțină unui plan, este suficient ca el să fie situat pe o dreaptă a planului. Întrucât ***d.d.c.m.m.p.*** față de planul ***H*** determină toate orizontalele planului, se va situa punctul ***m, m'*** pe o orizontală a acestuia. Pentru aceasta, se duce prin ***m*** proiecția ***t*** a orizontalei perpendiculară pe ***d*** (dreapta ***d.c.m.m.p.*** față de ***H*** este perpendiculară pe toate orizontalele planului). Se determină apoi, pornind de la ***s*** şi proiecția verticală ***s'*** a punctului ***S*** de concurență a celor două drepte coplanare. Prin ***s'*** se duce apoi proiecția ***t'*** a orizontalei planului, paralelă cu ***Ox***. Cu ajutorul liniei de ordine duse prin ***m*** se găseşte, la intersecția cu ***t'***, şi proiecția ***m'*** a punctului căutat.

3) Printr-un punct m, m' (figura 4.32.) să se ducă un plan Rh, Rv paralel cu un plan dat Ph, Pv.

Rezolvare:

Pentru ca cele două plane să fie paralele va trebui ca ***Rh*** să fie paralelă cu ***Ph,*** iar ***Rv*** cu ***Pv***. Pentru ca planul ***Rh, Rv*** să conțină punctul ***m, m'*** va trebui ca acesta din urmă să fie situat pe o dreaptă a planului.

Se duce întâi prin ***m, m'*** orizontala ***t, t'*** care, urmând să fie conținută, în planul ***Rh, Rv***, va trebui să fie paralelă cu urma ***Rh*** şi implicit cu ***Ph***, deoarece cele două plane sunt paralele. Se duce deci prin ***m*** proiecția ***t*** a orizontalei paralelă cu ***Ph***, iar prin ***m'***, proiecția ***t'*** paralelă cu ***Ox***. Se determină apoi urma ***v, v'*** a orizontalei şi prin aceasta se duce urma ***Rv*** a planului căutat, paralelă cu ***Pv***. Din punctul ***Rx***, aflat la intersecția lui ***Rv*** cu ***Ox***, se duce, paralel cu ***Ph***, urma ***Rh***.

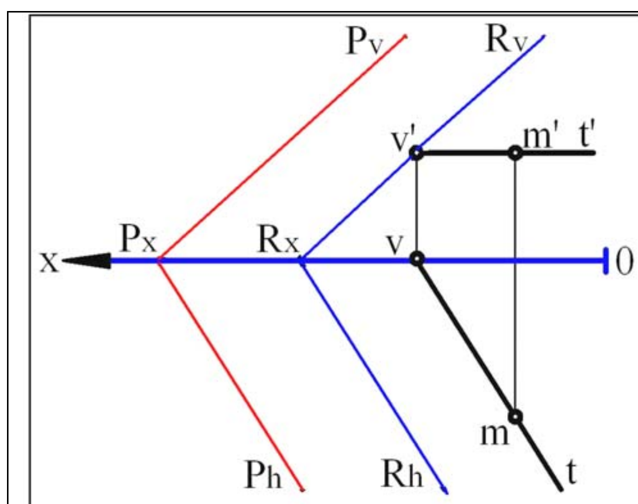


Fig .4.32. Aplicația 3.

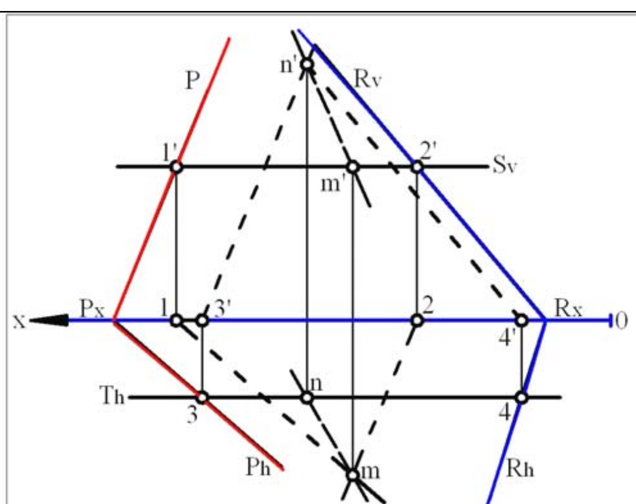


Fig. 4.33. Aplicația 4.

4) Să se determine dreapta după care se intersectează două plane oarecare ale căror urme nu se întâlnesc în cadrul epurei.

Rezolvare:

Dreapta de intersecție nu poate fi determinată prin cele două urme ale ei. Se vor căuta deci două puncte oarecare ale dreptei. Pentru aceasta, ştiind că intersecția, a trei plane oarecare este un punct, se vor intersecta cele două plane date, pe rând, cu două plane auxiliare convenabil alese şi se vor obține astfel cele două puncte ale dreptei căutate.

Fie ***Ph, Pv*** şi ***Rh, Rv*** (figura 4.33.) cele două plane date. Dacă se intersectează atât ***P*** cât şi ***R*** cu un plan auxiliar de nivel ***Sv***, vor rezulta două drepte de intersecție, orizontalele ***1 m***, ***1' m'*** şi ***2 m***, ***2' m'***. Punctul lor de intersecție ***m, m'*** este comun celor trei plane, deci este un punct al dreptei de intersecție căutate.

Pentru a obține un al doilea punct al dreptei se poate repeta operația de mai sus utilizând un alt plan de nivel, sau, aşa cum s-a făcut în epura din figura 4.33, se poate recurge la un plan de front ***Th***, care duce la frontalele de intersecție ***3 n***, ***3' n'*** şi ***4 n***, ***4' n'*** cu punctul comun căutat ***n, n'***.

Unind pe ***m*** cu ***n*** şi pe ***m'*** cu ***n'***, se găsesc cele două proiecții ale dreptei de intersecție a planelor ***P*** şi ***R***.

5). Să se determine punctul în care o dreaptă oarecare intersectează o placă plană de formă triunghiulară.

Rezolvare:

Fie ***abc, a'b'c'*** (figura 4.34) placa triunghiulară şi ***d, d'*** dreapta dată.
Se duce prin dreapta dată un plan proiectant vertical ***Ph, Pv*** (cu urma ***Ph*** confundată cu ***d***) care intersectează placa triunghiulară după dreapta ***rs, r's'***.

Punctele ***r, r'*** şi ***s, s'*** reprezintă punctele în care laturile ***ab, a'b'*** respectiv ***bc, b'c'*** intersectează planul proiectant ***Ph, Pv***.

Punctul căutat ***m, m'*** se găseşte la intersecția dreptei ***d, d'*** cu ***rs, r's'***.
Dacă se consideră placa triunghiulară opacă, este evident că o porțiune din dreaptă va apărea nevăzută, fiind acoperită de placă. Pentru stabilirea porțiunilor văzute şi nevăzute ale dreptei se observă că punctul de concurență aparentă ***s*** are ca proiecții verticale pe ***s'*** pe ***b'c'*** şi pe ***s1'*** pe ***d'***. Întrucât ***s'*** indică o cotă mai mare decât ***s1'***, rezultă că latura ***bc***, ***b'c'*** este situată deasupra dreptei ***d, d'***. Porțiunea ***ms*** va fi deci nevăzută. În mod analog se stabileşte, cu ajutorul punctului de concurență aparentă ***t'***, că ***m't'*** este nevăzută.

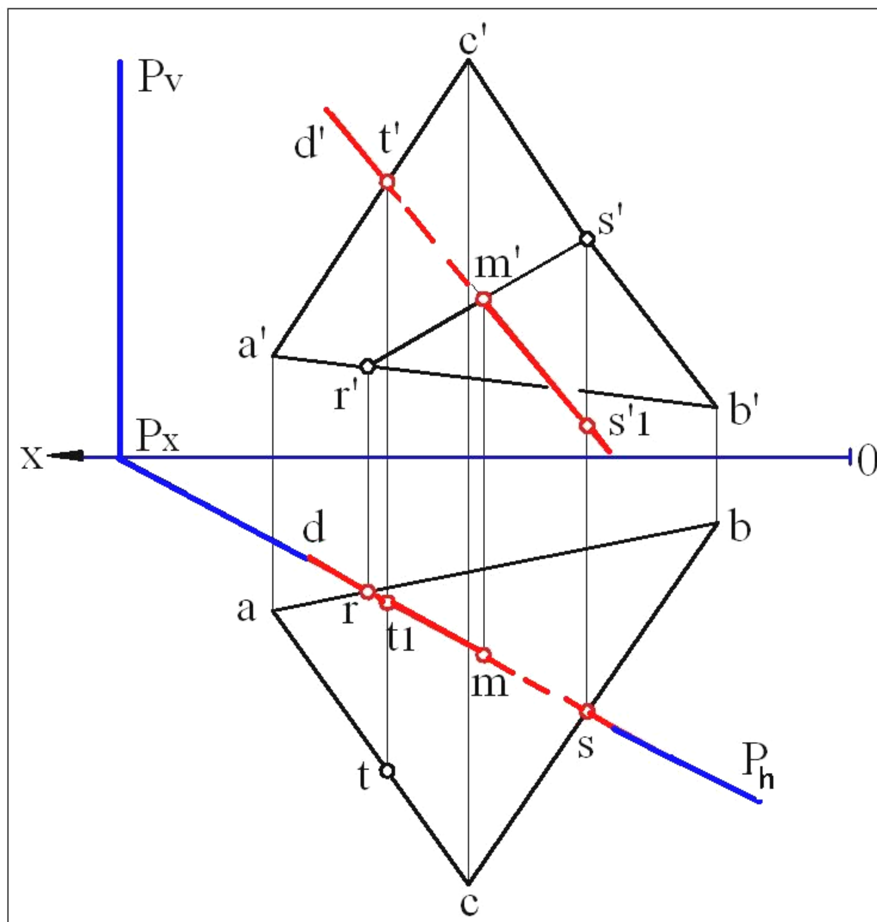


Fig. 4.34. Aplicația 5.

6. Să se reprezinte în triedru şi epură un dreptunghi ABCD de nivel.
Rezolvare în figura 4.35.

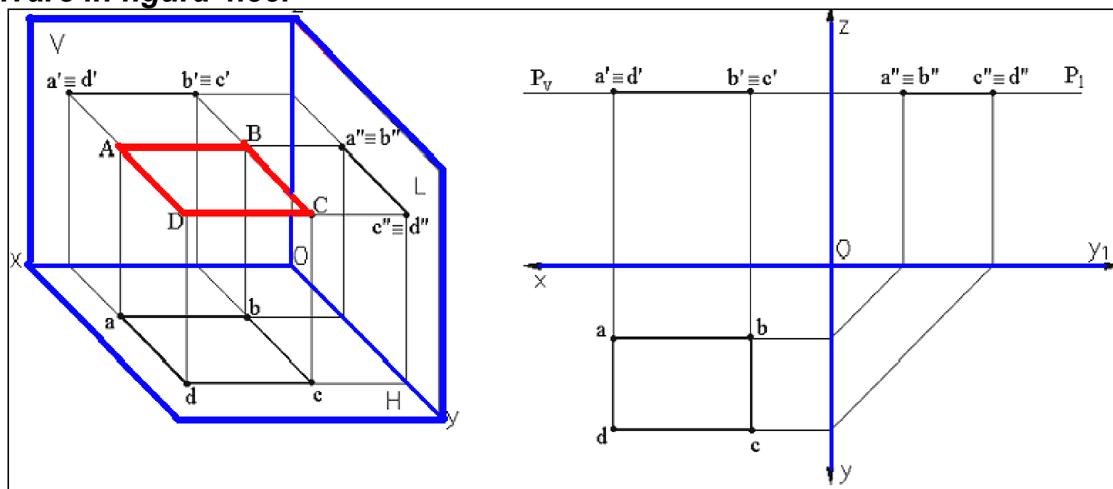


Fig.4.35. Aplicația 6.

7. Să se reprezinte în triedru şi epură un cerc de front.
Rezolvare în figura 4.36.

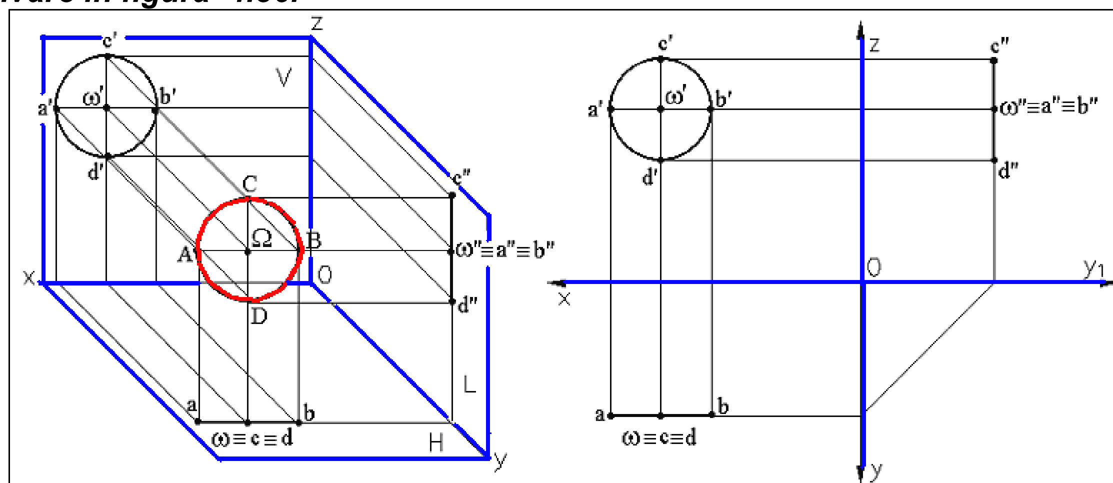


Fig.4.36. Aplicația 7.

8. Să se reprezinte în epură un hexagon de nivel.
Rezolvare în figura 4.37.

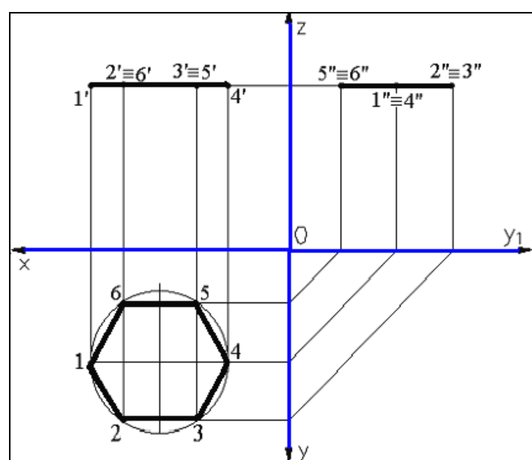


Fig.4.37. Aplicația 8.

5. POLIEDRE

5.1. Poliedre regulate

Se numesc poliedre, corpurile geometrice limitate de ***fețe plane***. Fețele plane care mărginesc un poliedru se intersectează după drepte numite ***muchiile*** poliedrului. Punctele de intersecție ale muchiilor se numesc ***vârfurile poliedrului***.

Poliedrul este ***convex,*** dacă rămâne în întregime de aceeaşi parte a suprafeței plane a oricărei fețe a lui şi ***concav,*** când unele din suprafețele plane ce corespund fețelor, taie poliedrul.

Poliedrul regulat convex are toate fețele poligoane regulate egale între ele şi toate unghiurile solide egale între ele. În natură există ***doar cinci poliedre regulate*** (figurile 5.1; 5.2). Acestea sunt: ***tetraedrul*** (4 fețe triunghiuri echilaterale), cubul sau ***hexaedrul*** (6 fețe pătrate), ***octaedrul*** (8 fețe triunghiuri echilaterale), ***dodecaedrul*** (12 fețe pentagoane) şi ***icosaedrul*** (20 fețe triunghiuri echilaterale).

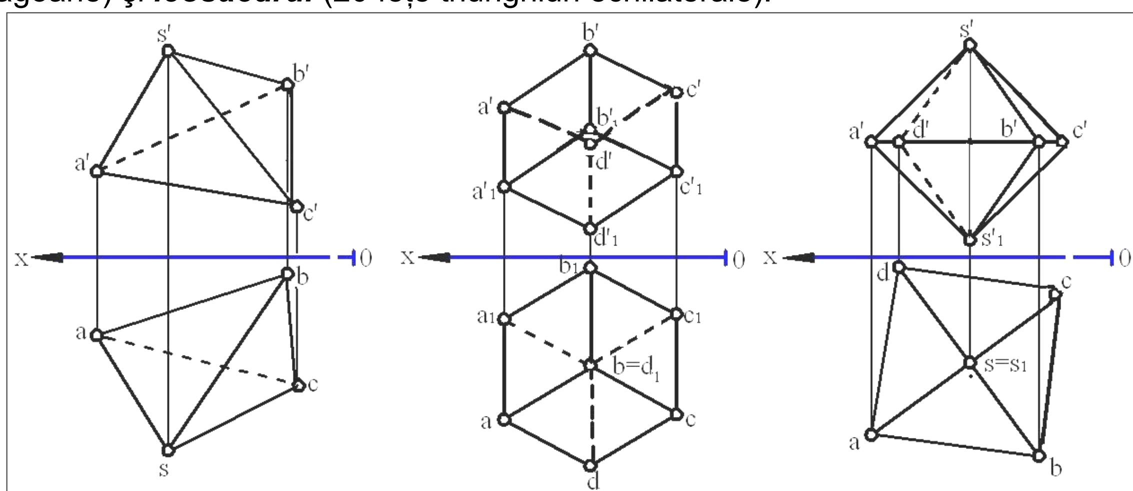


Fig.5.1. Tetraedrul, cubul, octoedrul.

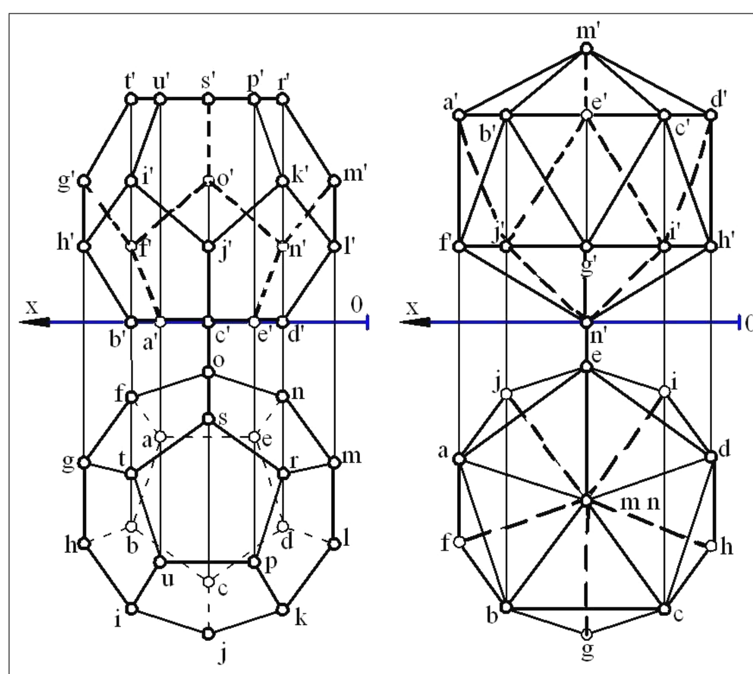


Fig. 5.2. Dodecaedrul şi icosaedrul.

Din categoria poliedrelor neregulate, se întâlnesc mai des în construcții prisma şi piramida.

5.2. Reguli de reprezentare

Poliedrele se reprezintă prin proiecțiile muchiilor lor pe cele două plane H şi V. Problema se reduce deci la reprezentarea în epură a unor segmente de dreaptă, concurente în vârfurile poliedrului.

Pentru a face epura cât mai expresivă, poliedrele se consideră opace şi, în acest caz, în raport cu poziția ocupată de observator, **unele muchii vor apărea văzute şi deci se vor trasa în epură cu linii pline, iar altele, nevăzute se vor trasa cu linii întrerupte**. Proiecția orizontală a unui poliedru este aspectul său pentru un observator situat la o distanță infinită deasupra planului ***H*** şi privind în direcția proiectantelor față de acesta iar proiecția verticală a poliedrului constituie aspectul său pentru observatorul aşezat la o distanță infinită în fața planului ***V*** şi privind în direcția proiectantelor față de acesta. Rezultă că, întrucât poziția observatorului este diferită pentru cele două proiecții, nu există o corespondență directă în cele două proiecții între muchiile văzute şi cele nevăzute.

O muchie văzută în proiecția orizontală poate apărea nevăzută în cea verticală, şi invers.

Pentru a reprezenta un poliedru oarecare prin muchiile lui este suficient să se cunoască proiecțiile vârfurilor lui. Cu ajutorul acestora se obțin şi proiecțiile muchiilor respective. Pentru a deosebi muchiile văzute de cele nevăzute este suficientă, de cele mai multe ori, observarea atentă a poliedrului.

Sunt utile următoarele **observații:**

1. Muchiile care dau conturul aparent se trasează cu linii pline.
2. O muchie apare în proiecție fie complet văzută, fie complet nevăzută;
*3. Dacă două muchii au un punct de concurență aparentă, atunci una este văzută, iar cealaltă nevăzută, (de exemplu **bc** cu **ad** din figura 5.3).*

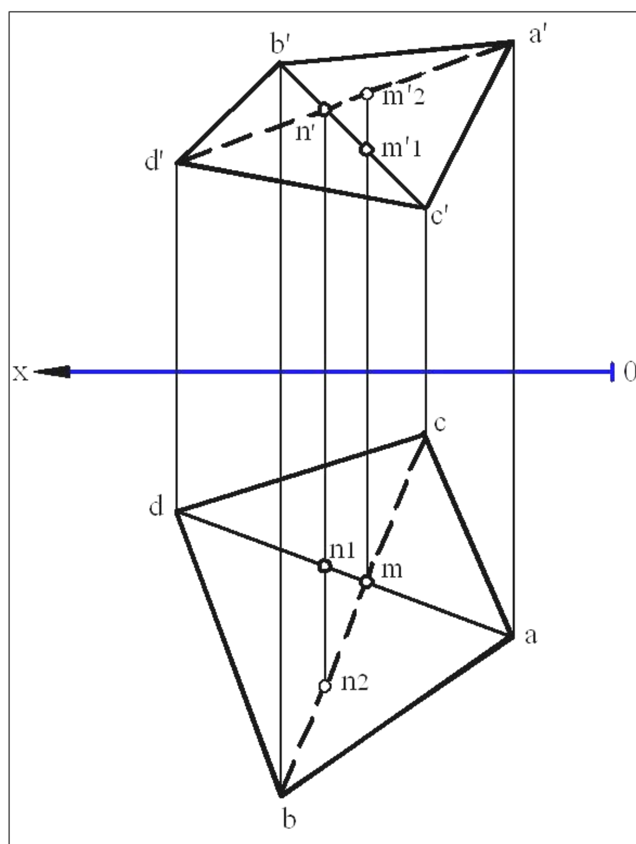


Fig. 5.3.Vizibilitatea muchiilor.

Pentru a stabili care din proiecțiile orizontale este văzută, ***ad*** sau ***bc***, trebuie văzut care din muchii trece deasupra celeilalte. Urmărind cele două puncte ***m***, ***m_1'*** şi ***m***, ***m_2'*** situate pe aceeaşi verticală, se vede că ***m_2'*** este deasupra lui ***m_1'*** şi deci muchia ***AD*** trece deasupra muchiei ***BC***; în concluzie, ***ad*** se vede, iar ***bc*** nu se vede.
În mod similar, în proiecție verticală, deoarece ***n_2*** este în fața lui ***n_1***, rezultă că ***b'c'*** se vede şi ***a'd'*** nu se vede.
*4. O față a poliedrului se vede în proiecție numai dacă toate muchiile care o mărginesc sunt văzute (de exemplu **abd** şi **adc** în proiecția pe planul **H**, figura 5.3).*
Fața care conține un punct vizibil este vizibilă în întregime.
*5. Dacă muchia de intersecție a două fețe aparține conturului aparent, una din fețe se vede, iar cealaltă nu se vede (de exemplu **acd** şi **bcd**).*

Pentru exemplificare, se reprezintă în epură o piramidă oarecare şi o prismă oblică, cu bazele situate în planul ***H***.

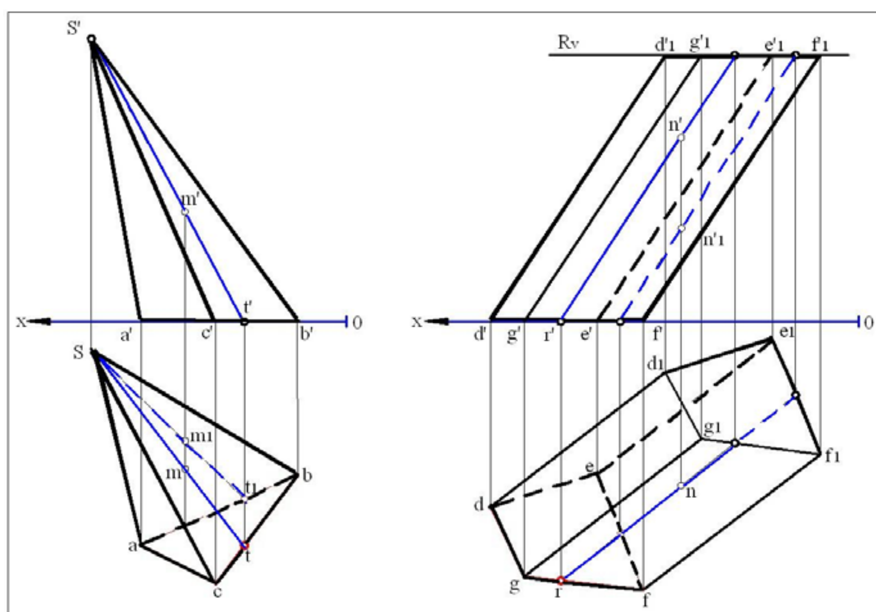


Fig.5.4.Piramidă oblică. ***Fig.5.5.Prisma oblică.***

Fie ***ABCS piramida*** ce trebuie reprezentată (figura 5.4). Dacă se aşează baza ***ABC*** în planul ***H***, ea apare în adevărată mărime în ***abc*** şi se proiectează pe planul ***V*** în ***a'b'c'*** pe linia pământului. Dacă se ia ca vârf al piramidei un punct oarecare ***s, s'*** din spațiu, cele trei muchii laterale sunt: ***sa, s'a'***; ***sb, sb'*** şi ***sc, s'c'***. În ce priveşte vizibilitatea, ținând seama de regulile enunțate, rezultă că în proiecția orizontală doar **muchia *ab* nu se vede** (fiind situată chiar în planul ***H*** trece evident pe sub muchia proiectată în ***sc***), iar în cea verticală ***a'b'*** (fiind în spatele lui ***ac*** şi ***cb***).

În mod similar în figura 5.5., dacă se aşează patrulaterul neregulat ***DEFG,*** constituind baza unei **prisme oblice,** chiar în planul ***H***, acesta va apărea în adevărată mărime în ***defg*** şi proiectat vertical în ***d'e'f'g'*** pe linia ***Ox***.

Muchiile prismei se duc apoi din fiecare vârf al poligonului de bază, paralele între ele şi de o anumită înclinare în fiecare proiecție. Pentru a construi baza superioară a prismei, este suficient să se construiască o figură egală şi cu laturile paralele cu baza inferioară; în proiecție orizontală aceasta va apărea după ***$d_1e_1f_1g_1$***, egală şi la fel aşezată cu ***defg***, iar în proiecție verticală redusă la segmentul de dreaptă ***$d_1'f_1'$*** paralel cu ***d'f'***.

Muchiile văzute şi nevăzute ale prismei se stabilesc în acest caz prin simpla observare a celor două proiecții ale poliedrului.

5.3. Punct curent pe suprafața unui poliedru

Un punct aparține suprafeței unui poliedru, dacă se găseşte pe o dreaptă situată pe una din fețele poliedrului.

Astfel în figura 5.4., pentru **a** determina cele două proiecții ***m, m'*** ale unui punct de pe suprafața unei piramide, se alege, spre exemplu, proiecția verticală ***m'*** undeva în interiorul conturului aparent vertical al piramidei, se duce prin punctul ***m'*** proiecția ***s't'*** a dreptei ce trece prin vârful ***s, s'*** al piramidei şi se sprijină într-un punct ***t, t'*** pe poligonul de bază şi apoi, cu ajutorul liniei de ordine coborâtă din ***m'*** pe ***st***, se găseşte în ***m*** proiecția orizontală a punctului căutat. Este de remarcat că, deoarece linia de ordine coborâtă din ***t'*** intersectează poligonul ***abc*** atât pe latura ***bc*** în ***t*** cât şi pe ***ab*** în t_1 rezultă că lui ***s't'*** îi corespund atât ***st*** (pe fața ***sbc***) cât şi st_1 (pe fața ***sba***). În ***m'*** se va proiecta atunci atât punctul de proiecție orizontală ***m*** cât şi m_1.
Într-adevăr atât ***m, m'*** cât şi m_1, ***m'*** sunt puncte de pe suprafața poliedrului; ele corespund punctelor în care dreapta de capăt de proiecție verticală ***m'*** intersectează poliedrul.

În mod asemănător, în figura 5.5., pentru a determina proiecțiile ***n, n'*** ale unui punct de pe suprafața unei prisme, s-a pornit de la proiecția orizontală n luată arbitrar şi s-a determinat proiecția verticală ***n'*** cu ajutorul dreptei ***nr***, ***n'r'*** dusă din punct, paralelă cu muchiile prismei. Şi în acest caz, pentru proiecția orizontală ***n***, s-au obținut proiecțiile verticale ***n'*** şi n_1', deci două puncte ***n, n'*** şi ***n***, n_1' de pe suprafața prismei corespund de fapt punctelor în care verticala de proiecție orizontală ***n*** intersectează poliedrul.

5.4. Secțiuni plane în poliedre

Un plan oarecare intersectează un poliedru după un poligon, ale cărui vârfuri sunt punctele în care muchiile poliedrului intersectează planul şi ale cărui laturi sunt segmente din dreptele de intersecție ale fețelor poliedrului cu planul secant.
Întrucât poligonul de intersecție este definit atât prin vârfuri cât şi prin laturile lui, problema determinării lui în cele două proiecții se reduce la două probleme cunoscute: intersecția unei drepte cu un plan (muchiile cu planul secant) sau intersecția a două plane (fețele cu planul secant).

5.4.1. Secțiuni cu plane proiectante

Dacă planul secant este proiectant, problema are o rezolvare imediată, întrucât orice punct aflat într-un plan proiectant şi deci şi vârfurile poligonului de secțiune se proiectează pe una din urmele planului (pe urma verticală dacă este vorba de un plan de capăt, pe cea orizontală în cazul unui plan vertical).

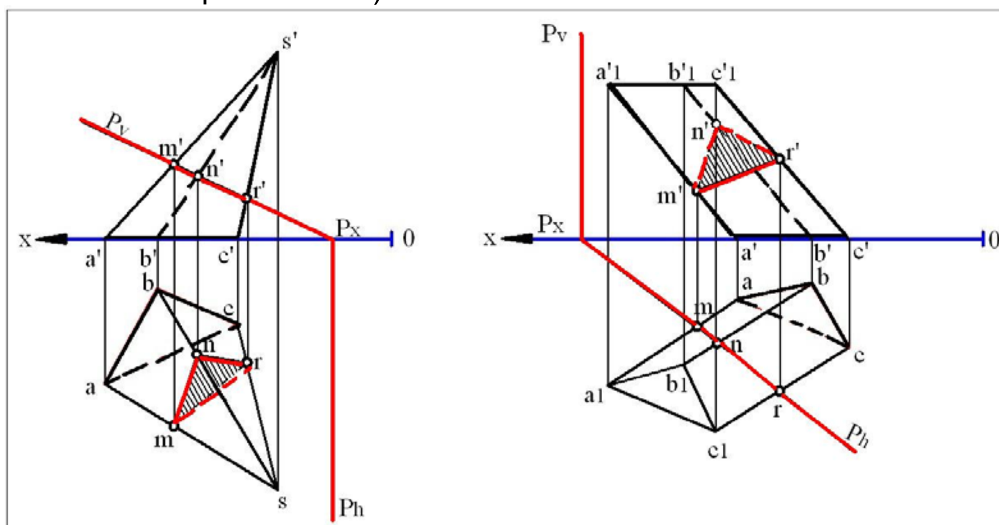


Fig.5.6. Poligon de secțiune în piramidă. ***Fig.5.7.Poligon de secțiune în prismă.***

Astfel, în figura 5.6., se determină poligonul de secțiune a unei piramide cu un plan de capăt. Punctele în care cele trei muchii ale piramidei intersectează planul de capăt ***Ph***, ***Pv*** se proiectează vertical în ***m', n'*** şi ***r'***, deoarece trebuie să se găsească în acelaşi timp pe proiecțiile verticale respective ale celor trei muchii şi pe urma verticală a planului de capăt. Coborând din ***m', n'*** şi ***r'*** liniile de ordine pe proiecțiile orizontale ale muchiilor corespunzătoare, se obține în ***mnr*** proiecția orizontală a poligonului de secțiune căutat.

În figura 5.7., se arată cum se obține, în mod similar, poligonul de secțiune a unei prisme cu un plan vertical. Planul secant fiind proiectant față de planul ***H***, vârfurile poligonului se găsesc în proiecție orizontală în ***m, n*** şi ***r***, la intersecția lui ***Ph*** cu aa_1, respectiv bb_1 şi cc_1. Ridicând liniile de ordine din ***m, n*** şi ***r***, pe proiecțiile verticale ale muchiilor respective, se găseşte în ***m'n'r'*** proiecția verticală a poligonului căutat.

Dacă prisma este dreaptă şi planul secant de capăt (figura 5.8), poligonul de secțiune apare în ambele proiecții: proiecția verticală ***m'n'r's'*** a acestuia se suprapune peste urma ***Pv*** a planului, iar proiecția orizontală ***mnrs*** peste conturul ***abcd*** al bazei prismei, întrucât muchiile prismei sunt drepte proiectante față de planul ***H***.

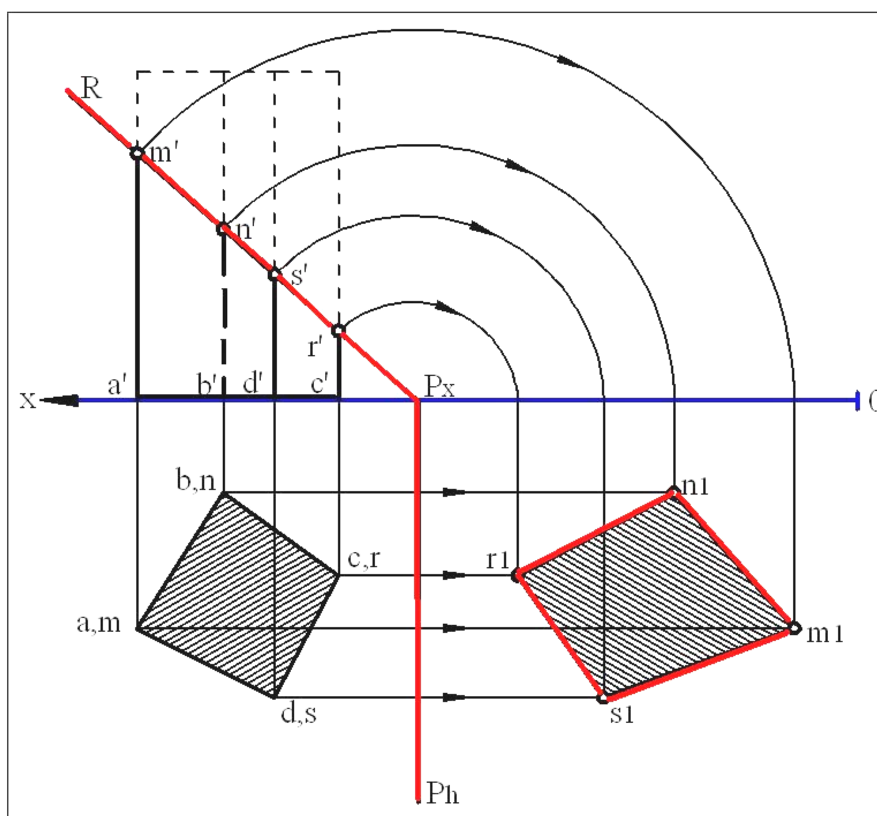


Fig.5.8. Adevărata mărime a poligonului de secțiune.

Adevărata mărime a poligonului de secțiune se obține rabatând (rotind) planul secant în jurul urmei ***Ph*** pe planul ***H***. Un punct oarecare ***M*** al poligonului se rabate cunoscând că, după rabatere, trebuie să se găsească pe perpendiculara dusă din ***m*** la axa ***Ph*** şi la o distanță ***mpm*** de aceasta, egală cu raza de rabatere. Raza de rabatere se proiectează în adevărată mărime pe planul ***V***, cu care este paralelă, în $P_x m'$.

5.4.2. Secțiuni cu plane oarecare

1) Pentru determinarea vârfurilor poligonului de secțiune a unui poliedru cu un plan oarecare, se intersectează pe rând fiecare din muchiile poliedrului cu acest plan.

Astfel, fie ***abcs, a'b'c's'*** o piramidă (figura 5.9.) şi ***Ph, Pv*** un plan secant oarecare. Pentru a determina punctul în care muchia ***sa, s'a'*** intersectează planul ***Ph, Pv*** se duce planul de capăt ***R_{1h}, R_{1v}*** prin muchia ***sa, s'a'***; se determină apoi dreapta de intersecţie ***h₁v₁***, a celor două plane şi la intersecţia acesteia cu muchia ***sa, s'a'***, se obţine în ***m, m'*** punctul de intersecţie căutat. Procedând în mod analog, se găsesc în ***n, n'*** şi ***r, r'*** celelalte două vârfuri ale poligonului căutat.

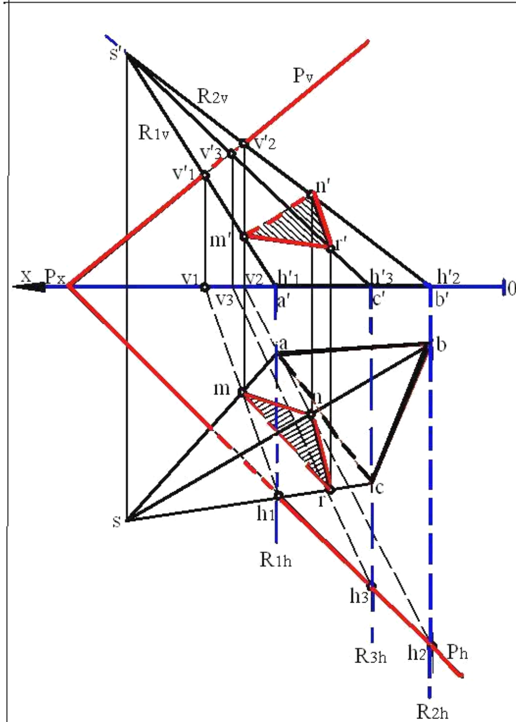


Fig.5.9.Piramida cu plan oarecare,secant.

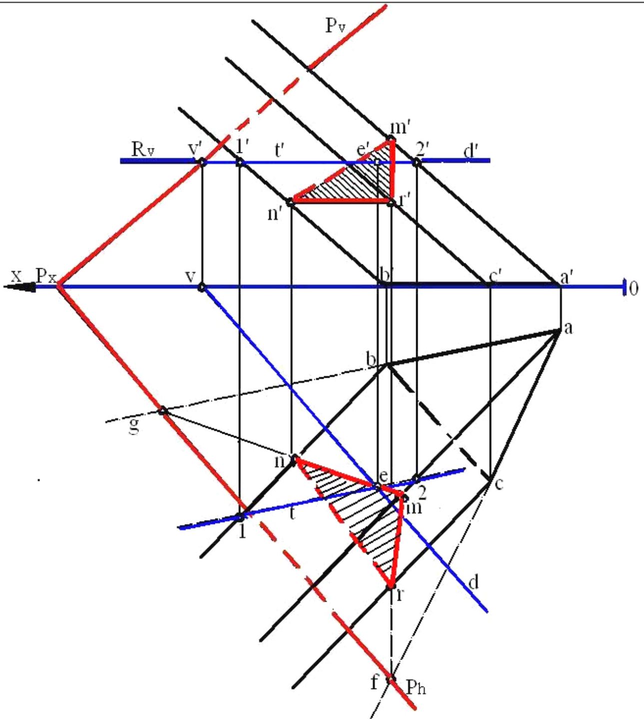


Fig. 5.10.Prisma cu plan oarecare, secant.

Pentru a trasa laturile poligonului în cele două proiecţii, se ţine seama de convenţiile adoptate în privinţa vizibilităţii: în proiecţie orizontală, ***mn*** şi ***nr*** sunt văzute deoarece se găsesc pe feţele corespunzătoare lui ***ab*** respectiv ***bc*** văzute, în timp ce ***mr*** este nevăzută, deoarece se găseşte pe faţa ***ac*** nevăzută. În mod analog, examinând proiecţia verticală, rezultă ***m'r'*** şi ***n'r'*** laturi văzute, iar ***m'n'*** nevăzută.

2) Pentru a determina laturile poligonului de secţiune a unui poliedru cu un plan oarecare se intersectează pe rând fiecare din feţele poliedrului cu acest plan.

Astfel, fie o prismă oblică cu baza triunghiul ***abc, a'b'c'*** (figura 5.10) şi ***Ph, Pv*** un plan secant oarecare. Pentru a determina dreapta după care se intersectează planul ***Ph, Pv*** cu planul feţei prismei ***ab, a'b'*** se observă că proiecţia ***ab*** a laturii poligonului de bază al prismei este chiar urma pe planul ***H*** a planului feţei ***ab, a'b'***. Deci la intersecţia lui ***ab*** cu ***Ph*** se va găsi în ***g*** un punct al dreptei de intersecţie căutate. Pentru a găsi un al doilea punct, se utilizează un plan auxiliar de nivel ***Rv*** care se intersectează cu ***Ph, Pv*** după orizontala ***d, d'*** şi cu planul feţei ***ab, a'b'*** după orizontala ***t, t'***, obţinută cu ajutorul punctelor ***1,1'*** şi ***2, 2'***; la intersecţia lui ***d, d'*** cu ***t, t'***, se găseşte în ***e, e'*** cel de-al doilea punct căutat. Unind pe ***g*** cu ***e*** se găseşte la intersecţia cu muchiile din ***a*** şi din ***b*** segmentul ***mn***, latura poligonului de pe faţa ***ab***. Trecând la faţa ***ac***, este suficient să se determine, ca mai sus, punctul ***f*** la intersecţia urmelor ***Ph*** şi ***ac***; unind pe ***f*** cu ***m***, se obţine în ***mr*** şi cea de-a doua latură a poligonului. Latura a treia rezultă direct unind pe ***n*** cu ***r***, care sunt deja cunoscute.

Proiecţia verticală ***m'n'r'*** a poligonului de secţiune se obţine cu ajutorul vârfurilor ***m'***, ***n'*** şi ***r'*** ridicând liniile de ordine din ***m, n*** şi ***r***, pe proiecţiile verticale ale muchiilor respective.

5.5. Intersecția unei drepte cu un poliedru

Pentru a găsi punctele în care o dreaptă oarecare intersectează un poliedru, se foloseşte un procedeu similar cu cel utilizat pentru a determina punctul de intersecție al unei drepte cu un plan.

Se duce prin dreapta dată ***D*** (figura 5.11.a) un plan auxiliar ***P***, care va intersecta poliedrul după un poligon ***MNR***. Dreapta ***D*** şi poligonul ***MNR*** fiind coplanare, se vor intersecta în punctele ***Q*** şi ***T*** care sunt tocmai punctele căutate întrucât se găsesc în acelaşi timp şi pe dreapta **D** şi pe laturile poligonului, deci pe fețele poliedrului.
În epură (figura 5.11. b), fie ***sabc, s'a'b'c'*** o piramidă oblică şi ***d,d'*** o dreaptă oarecare.
Se duce prin dreapta dată un plan proiectant vertical ***Ph, Pv*** şi se determină poligonul de intersecție ***mrn, m'n'r'***. Proiecția ***d'*** a dreptei intersectează proiecția ***m'n'r'*** a poligonului în punctele ***q'*** şi ***t'***. Coborând liniile de ordine respective pe ***d***, se găsesc în ***q*** şi ***t*** proiecțiile orizontale ale punctelor căutate.

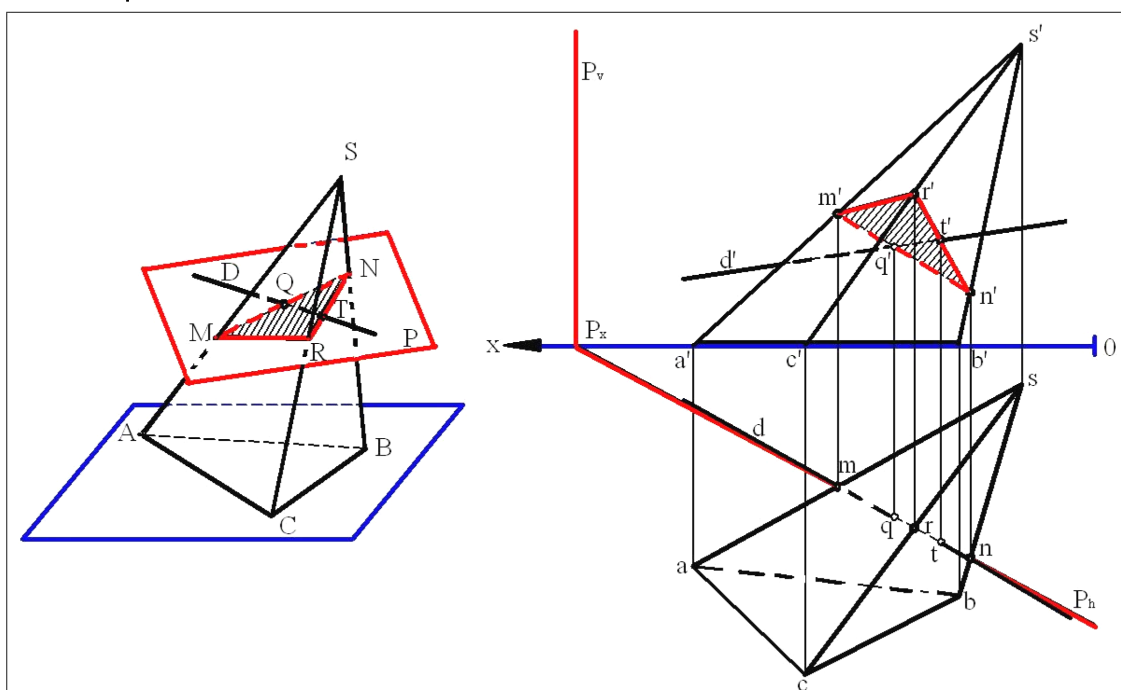


Fig. 5.11.Piramidă intersectată de dreaptă.

Pentru a face epura mai expresivă va trebui să se determine în cele două proiecții şi porțiunile văzute şi nevăzute ale dreptei ***d, d'***. Este evident că porțiunea ***qt, q't'***, în care dreapta străbate piramida, va fi nevăzută în ambele proiecții, după cum porțiunile din afara contururilor aparente ale poliedrului (cum sunt, spre exemplu, în proiecția orizontală, cele la stânga lui ***m*** şi la dreapta lui ***n***) sunt văzute. Rămân de analizat zonele intermediare ale dreptei. Pentru acestea se poate face următorul raționament: punctul ***q, q'*** se găseşte pe latura ***mn, m'n'*** a poligonului de secțiune, nevăzută în ambele proiecții; rezultă că porțiunea ***qm, q'm'*** va fi nevăzută, atât în proiecție orizontală cât şi în cea verticală. În mod analog, punctul ***t, t'*** se găseşte pe latura ***rn, r'n'***, văzută în ambele proiecții. Rezultă că dreapta va fi văzută în porțiunea de la punctul ***t, t'*** până la muchia ***sb, s'b'***, atât în proiecția orizontală cât şi în cea verticală.

Pentru a determina punctele în care o dreaptă oarecare intersectează o prismă se procedează la fel. În ambele cazuri însă, planul auxiliar ***P*** ce se duce prin dreaptă poate fi luat şi astfel încât să intersecteze suprafața laterală a poliedrului nu după un poligon, ci după două drepte. Un asemenea plan va trebui să treacă prin vârful piramidei, sau să fie paralel cu muchiile prismei. Secțiunile astfel obținute se numesc *secțiuni longitudinale.*

Se vor determina punctele în care o dreaptă oarecare intersectează o prismă, utilizând, pentru exemplificare, secțiunea longitudinală prin poliedru.

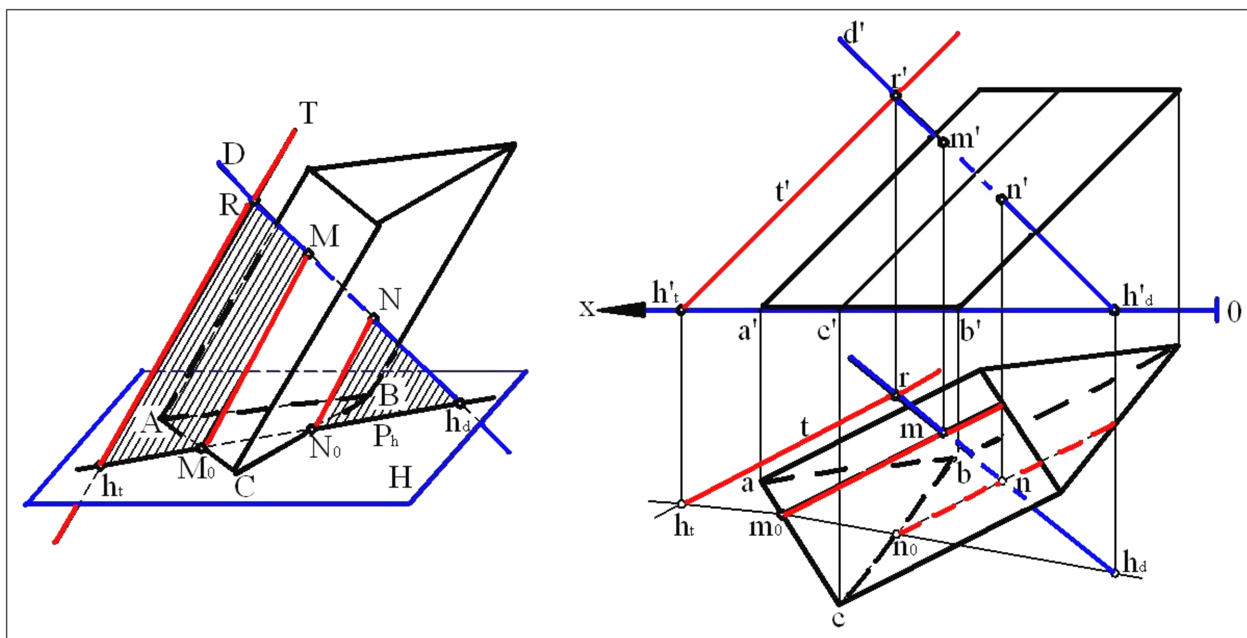


Fig. 5.12.Prismă intersectată de dreaptă.

Fie o prismă oblică cu baza un triunghi ***abc, a'b'c'*** (figura 5.12) şi ***d, d'*** o dreaptă oarecare intersectând prisma. Dacă dintr-un punct oarecare ***r, r'*** de pe dreaptă se duce o dreaptă ***t, t'*** paralelă cu muchiile prismei, cele două drepte concurente în ***r, r'*** vor determina planul de secțiune longitudinală. Urma orizontală ***Ph*** a planului se găseşte unind urmele orizontale ***hd*** respectiv ***ht*** ale celor două drepte. Această urmă intersectează proiecția ***abc*** a bazei prismei în m_0 şi n_0 prin care vor trece proiecțiile m_0m şi n_0n ale celor două drepte paralele cu muchiile prismei după care planul secant ***P*** taie poliedrul.

La intersecția acestora cu proiecția ***d*** a dreptei date se obțin proiecțiile ***m*** şi ***n*** ale celor două puncte de intersecție căutate. Cu ajutorul liniilor de ordine ridicate din ***m*** şi ***n*** pe ***d'*** se găsesc apoi şi proiecțiile verticale ***m'*** respectiv ***n'*** ale celor două puncte.

Pentru a determina porțiunile văzute şi nevăzute ale dreptei se procedează ca în cazul precedent.

Metoda poate fi aplicată în acelaşi fel şi pentru intersecția unei drepte cu o piramidă, cu singura diferență că, în acest caz, dreapta care urmează să definească planul de secțiune longitudinală împreună cu dreapta dată va trebui dusă prin vârful piramidei.

5.5. Desfăşurarea poliedrelor

Prin desfăşurarea unui poliedru se înțelege tăierea lui de-a lungul unor muchii şi aşternerea tuturor fețelor care-l mărginesc, una lângă cealaltă pe un singur plan, astfel încât să se obțină o singură figură plană.

Desfăşurarea este curent aplicată în practică mai ales la elementele de construcții alcătuite din piese subțiri (tablă, material plastic etc.), cum sunt învelitorile, piesele de tinichigerie, rezervoarele etc., pentru confecționarea cărora se croieşte întâi materialul după desenul desfăşuratei respective şi apoi se asamblează, astfel încât să reconstituie cu precizie, atât ca formă cât şi ca dimensiuni, elementul de construcție proiectat.

5.6.1. Piramida oblică

Pentru a putea desfăşura o piramidă oblică oarecare este suficient să se cunoască adevărata mărime a tuturor muchiilor ei. Într-adevăr, întrucât toate fețele laterale ale piramidei sunt triunghiuri, ele se pot construi imediat dacă se cunosc lungimile laturilor respective.

Fie ***abcs, a'b'c's'*** piramida oblică dată (figura 5.13.a).

Muchiile ***AB, BC*** şi ***CA*** fiind situate în planul ***H***, apar în adevărată mărime în ***ab, bc*** şi ***ca***. Pentru a obține şi adevărata mărime a muchiilor ce se întâlnesc în vârful ***s, s'*** al piramidei, se roteşte pe rând fiecare muchie în jurul unei axe verticale ***d, d'*** , care trece prin vârful ***s***, ***s'***, până când devine paralelă cu planul ***V*** şi poate fi măsurată în adevărată mărime. Astfel, după rotație, proiecția orizontală a muchiei ***SA***, spre exemplu, ajunge în ***sa_1*** paralelă cu ***Ox***, iar cea verticală în ***$s'a_1'$***. Urmând aceeaşi cale, se obțin şi celelalte două muchii în adevărată mărime, în ***$s'b_1$***' şi ***$s'c_1$'***.

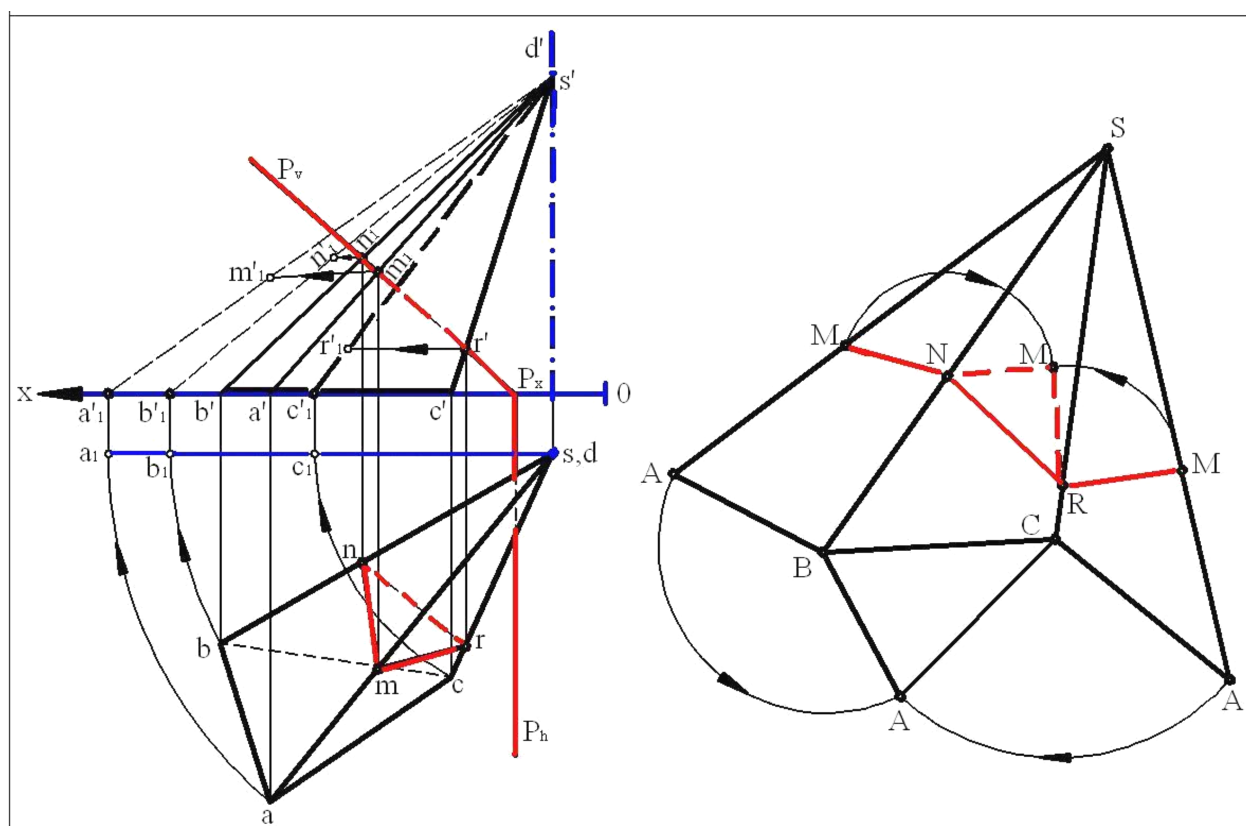


Fig. 5.13a.b.Desfăşurata piramidei şi a trunchiului.

Pentru a construi desfăşurata (figura 5.13.b) se începe prin a construi una din fețele laterale ale piramidei, spre exemplu ***SAB***. Pentru aceasta se ia pe o direcție oarecare lungimea ***AB***, măsurată în adevărată mărime în ***ab*** pe epură, apoi cu vârful compasului în ***A*** se duce arcul de rază ***AS***, măsurată în ***a_1's'*** şi din ***B*** arcul de rază ***BS***, măsurată în ***b_1's'***; la intersecția lor se găseşte vârful ***S***, care, unit cu ***A*** şi ***B***, determină fața ***SAB*** în adevărată mărime. Se trece apoi la ***SBC***, care se construieşte în mod similar, pornind de la ***SB*** considerat trasat şi căutând pe ***C***.

Urmând acelaşi procedeu se obține şi ***SCA*** şi, în sfârşit, baza ***ABC*** a piramidei, care completează desfăşurata.

5.6.2. Trunchi de piramidă

Dacă se secționează piramida cu un plan de capăt ***Ph, Pv*** (figura 5.13.a) se obține trunchiul de piramidă ***abcmnr, a'b'c'm'n'r'***.

Pentru a construi desfăşurata acestui volum, după ce s-a construit întâi desfăşurata piramidei aşa cum s-a arătat mai sus, se poartă pe muchiile ***SA***, ***SB*** şi ***SC*** respectiv segmentele ***SM*** măsurat în ***s's₁'***; ***SN*** măsurat în ***s'n₁'*** şi ***SR*** măsurat în ***s'r₁'***, care s-au obținut în adevărată mărime tot prin rotație în jurul axei verticale ***d, d'***.

De remarcat că, pe epură, pentru a determina segmentele ***s'm₁'***, ***s'n₁'*** şi ***s'r₁'*** a fost suficient să se ducă paralele ***m'm₁'***, ***n'n₁'*** şi ***r'r₁'*** la ***Ox***, întrucât proiecțiile verticale ale muchiilor rotite sunt deja cunoscute.

Unind pe ***M*** cu ***N***, ***N*** cu ***R*** şi ***B*** cu ***M***, se obține linia frântă ***MNRM***, care limitează la partea superioară desfăşurata trunchiului de piramidă. Construind, în sfârşit, în ***NRM*** şi baza superioară a volumului, se completează desfăşurata trunchiului de piramidă.

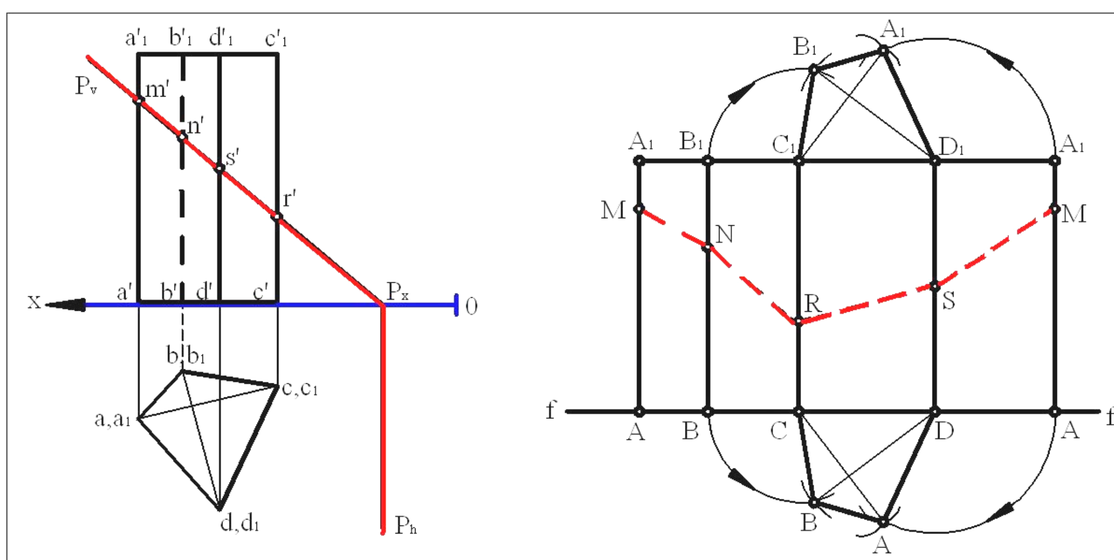


Fig. 5.14.Desfăşurarea prismei.

5.6.3. Prisma dreaptă

Pentru desfăşurarea prismei drepte nu este nevoie de nici o construcție geometrică auxiliară, întrucât toate elementele necesare construirii desfăşuratei pot fi măsurate direct în epură (figura 5.14.a).

Într-adevăr, laturile poligoanelor de bază ***ABCD*** şi $A_1B_1C_1D_1$ apar în adevărată mărime proiectate pe planul ***H***, în ***abcd***, iar muchiile laterale, pe planul ***V***.

Pentru a obține desfăşurata (figura 5.14.b) se poartă pe o linie ***f,f*** succesiv, toate laturile poligonului de bază măsurate în adevărată mărime în ***ab***, ***bc***, ***cd*** şi ***da***, obținându-se astfel desfăşurata poligonului de bază ***ABCD***. Din punctele ***A, B, C, D*** şi ***A*** se duc perpendiculare pe dreapta ***ff***, pe care se aşează muchiile prismei în adevărată mărime, de lungimi egale: $AA_1 = BB_1 = ... = aa_1'$

Linia $A_1B_1C_1D_1$ reprezintă în cazul de față desfăşurata poligonului bazei superioare a prismei. Ataşând şi cele două poligoane de bază, construite cu ajutorul diagonalelor lor, la desfăşurata suprafeței laterale a prismei, se obține în întregime desfăşurata prismei drepte.

Dacă prisma este secționată de un plan de capăt ***Ph, Pv***, suprafața laterală a trunchiului rămas sub plan poate fi desfăşurată în mod analog cu ajutorul lungimilor muchiilor secționate, măsurate în adevărată mărime pe planul ***V*** în ***a'm'***, ***b'n'***, ***c'r'*** şi ***d's'***.

5.6.4. Prisma oblică

Pentru desfăşurarea unei prisme oblice se secționează întâi prisma cu un plan perpendicular pe muchii, pentru a se obține un poligon, numit *de secțiune dreaptă*, care va servi în desfăşurare la raportarea muchiilor. Pentru ca acestea să apară în epură în adevărată mărime, se recomandă ca prisma să se aducă sau să se aşeze de la început cu muchiile frontale.

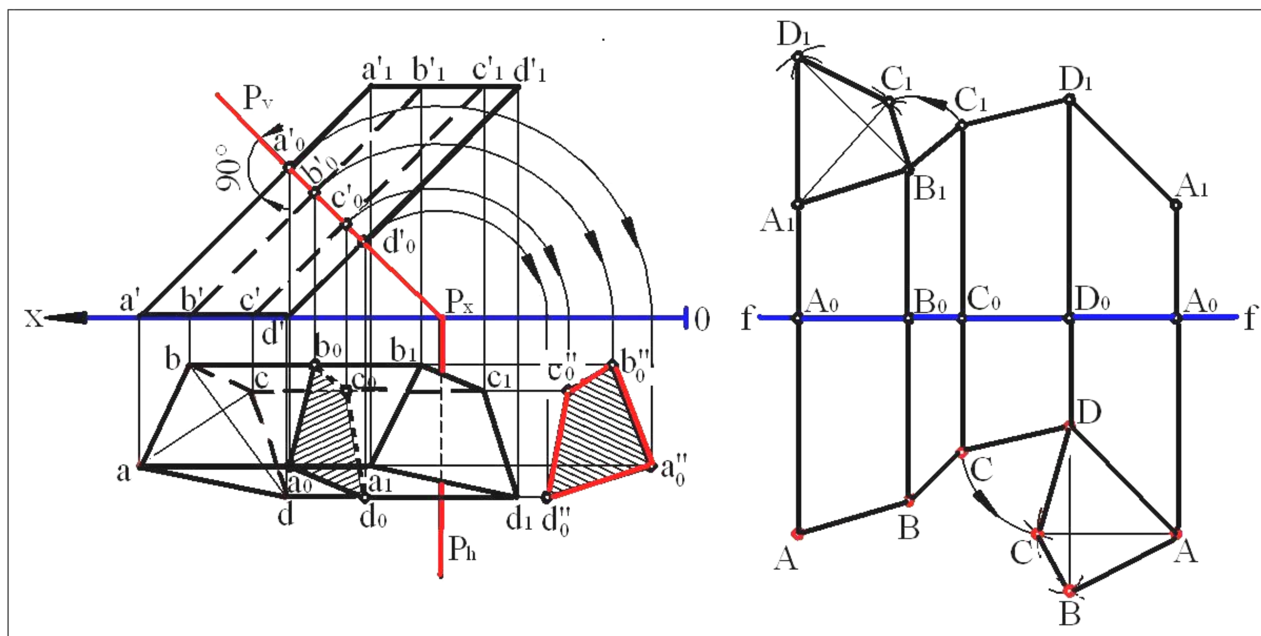


Fig. 5.15a.b. Desfăşurata prismei oblice.

Calea care trebuie urmată în epură este următoarea (figura 5.15.a):
Se secționează prisma având muchiile de front, cu un plan de capăt ***P*** perpendicular pe muchii (***Pv*** este perpendicular pe ***a'a₁'***). Poligonul de secțiune se obține în adevărată mărime în $a_0\ b_0c_0d_0$, prin rabaterea planului ***Ph, Pv*** pe planul ***H***.

Se trece la construirea desfăşuratei (figura 5.15.b). Pe o dreaptă oarecare ***ff*** se desfăşoară poligonul de secțiune cu laturile măsurate în adevărată mărime pe poligonul rabătut în $a_0b_0c_0d_0$. Pe perpendicularele ridicate la ***ff*** în punctele A_0, B_0, C_0, D_0 şi A_0 se poartă lungimile muchiilor de deasupra şi de dedesubtul planului ***P***, măsurate în adevărată mărime în proiecția verticală:

$$A_0A_1 = a_0'a_1';\ A_0A = a_0'a';\ B_0B_1 = b_0'b_1', \text{ etc.}$$

Unind între ele punctele aflate, ***A, B, C, D, A,*** respectiv A_1, B_1, C_1, D_1, A_1 se obțin două linii poligonale care, dacă construcția grafică a fost bine executată, trebuie să fie paralele între ele.

Pentru a completa desfăşurata se construiesc apoi, cu ajutorul diagonalelor ***AC*** şi ***BD***, cele două poligoane de bază ***ABCD*** şi $A_1B_1C_1D_1$, care se găsesc în adevărată mărime în ***abcd***, pe planul ***H***.

5.7. Aplicații

1) Să se determine proiecțiile unui cub cu muchiile de lungime dată, aşezat cu una din fețe într-un plan de capăt.

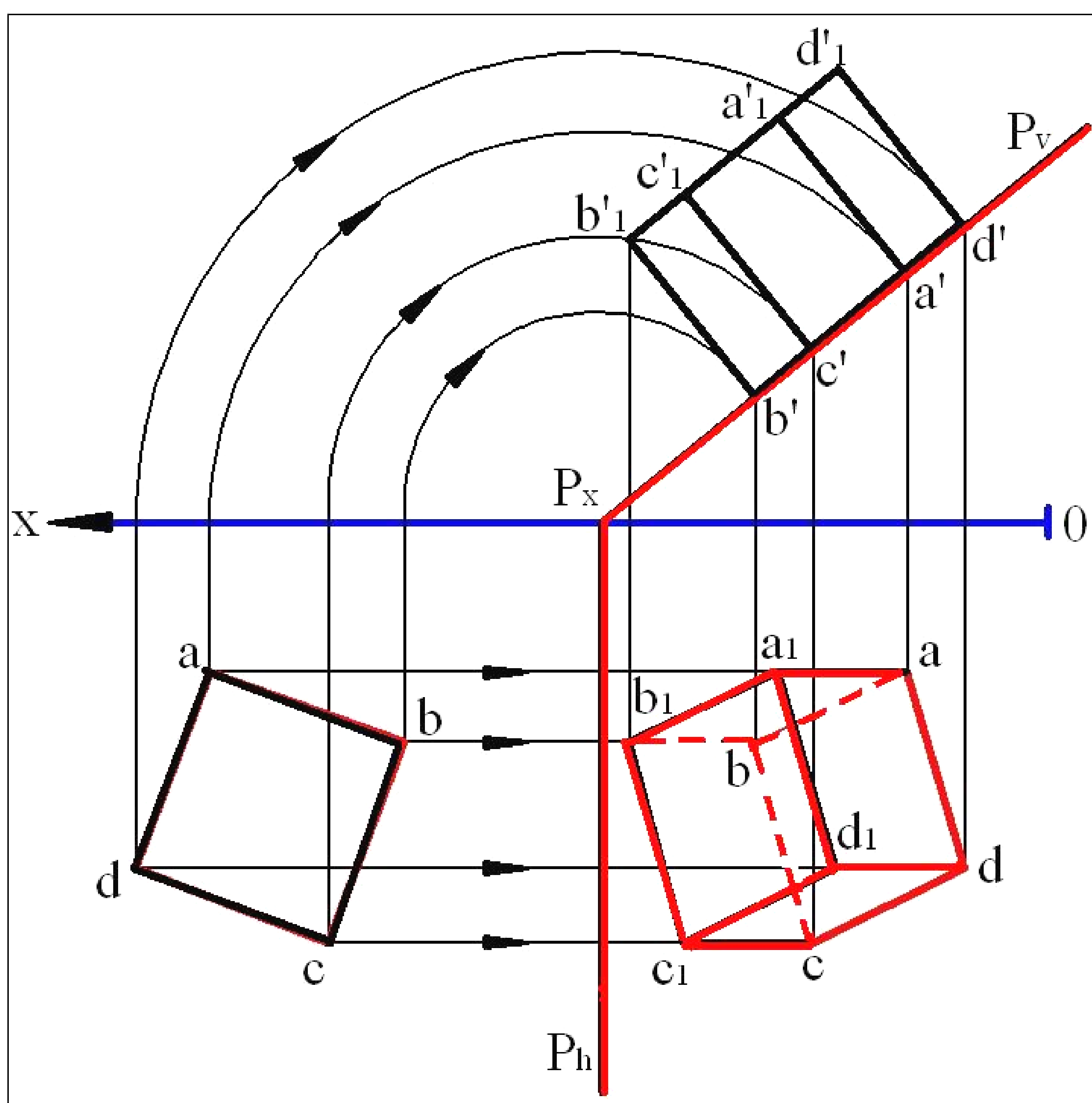


Fig.5.16. Aplicația 1.

Rezolvare:

Fie ***Ph, Pv*** (figura 5.16) planul de capăt dat. Pentru a construi baza cubului situată în planul de capăt se rabate întâi planul ***Ph, Pv*** pe planul orizontal de proiecție, se construieşte pătratul în adevărată mărime pe planul rabătut şi apoi se ridică în cele două proiecții: ***abcd*** şi ***a'b'c'd'***. Muchiile perpendiculare pe baza ***ABCD*** vor fi perpendiculare şi pe planul ***Ph, Pv*** şi deci, implicit, paralele cu planul ***V*** ,deoarece ***Ph, Pv*** este un plan de capăt; rezultă că, în proiecție verticală, ele apar în adevărată mărime şi pot fi construite, dacă se poartă pe fiecare din perpendicularele ridicate din punctele ***a', b', c'*** şi ***d'*** lungimi egale cu muchia cubului. Proiecțiile orizontale ale muchiilor de front aa_1, bb_1, cc_1, şi dd_1 se obțin ducând paralele la ***Ox*** respectiv din ***a, b, c, d*** şi coborând pe acestea liniile de ordine corespunzătoare din a_1', b_1', c_1' şi d_1'.

Pentru determinarea muchiilor văzute şi nevăzute se analizează fiecare proiecție în parte ținând seama de convențiile adoptate în privința vizibilității.

2) Să se determine punctele în care o dreaptă de profil intersectează o suprafață prismatică.

Rezolvare:

Fie ***hv, h'v'*** (figura 5.17) dreapta de profil şi ***abcd,*** ***$a_1b_1c_1d_1$, a'b'c'd', a_1'b_1'c_1'd_1'***, suprafața prismatica limitată la porțiunea cuprinsă în primul diedru.

Se construiesc întâi pe planul lateral proiecțiile dreptei şi prismei, utilizând urmele lor. Se duce apoi prin dreapta dată un plan de profil ***Rh, Rv*** care intersectează prisma după poligonul ***pqrs, p'q'r's', p"q"r"s",*** având proiecția laterală ***p"q"r"s",*** de aceeaşi mărime cu poligonul de secțiune.

Dreapta de profil şi poligonul de secțiune fiind în acelaşi plan ***R***, se vor intersecta în cele două puncte căutate ***M*** şi ***N***, care se determină întâi pe proiecția laterală în ***m", n"*** şi se raportează apoi pe celelalte două proiecții ale dreptei, în ***m',n'*** respectiv ***m, n.***

Pentru a determina, porțiunile văzute şi nevăzute ale dreptei se ține seama că punctul ***M*** aparține feței ***ABA_1B_1*** iar ***N*** feței ***CDC_1D_1*** a prismei şi deci va fi văzut sau nevăzut după cum fața respectivă a prismei va apărea văzută sau nevăzută în fiecare din cele trei proiecții.

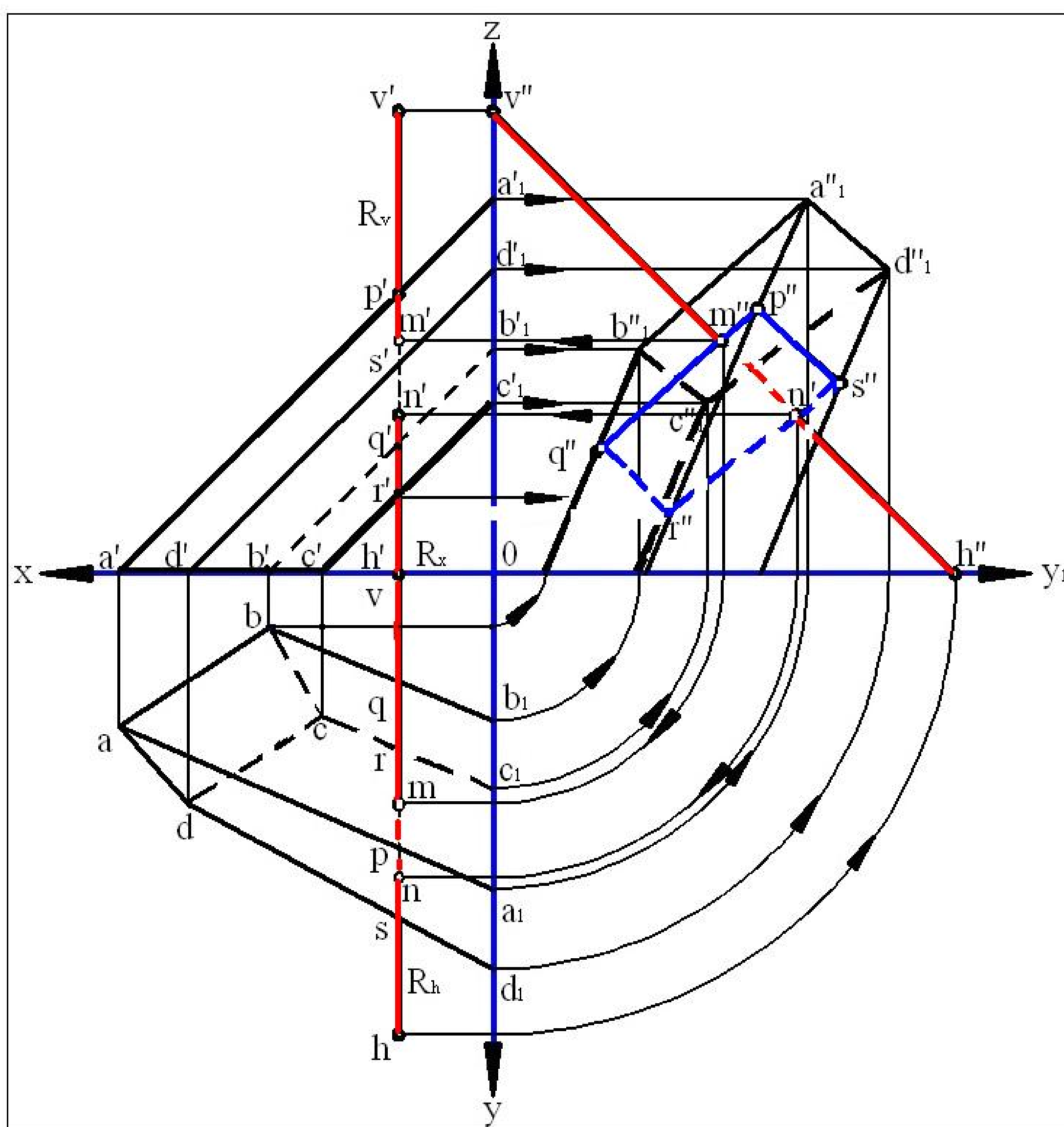


Fig.5.17. Aplicația 2.

3) Să se determine adevărata mărime a secțiunii unei piramide oblice cu un plan paralel cu Ox .

Rezolvare:

Fie ***Ph, Pv*** (figura 5.18.) planul secant paralel cu ***Ox*** şi ***abcs, a'b'c's'***, piramida oblică oarecare. Poligonul de secțiune se determină cu ajutorul proiecției pe planul lateral. Într-adevăr, planul ***Ph, Pv*** fiind proiectant față de ***L***, poligonul de secțiune se va proiecta pe urma ***Pl*** a planului, şi anume cu vârfurile ***m", n"*** şi ***r"*** respectiv la intersecțiile proiecțiilor ***a"s", b"s"*** şi ***c"s"*** cu urma ***Pl.*** Cu ajutorul liniilor de ordine se găsesc apoi pe proiecțiile muchiilor corespunzătoare şi proiecțiile ***m', n', r'*** şi ***m, n, r*** şi, cu ele, cele două poligoane-proiecție căutate.

Adevărata mărime a poligonului de secțiune se obține rabatând planul ***Ph, Pv*** pe planul vertical de proiecție. Un vârf oarecare ***m, m', m"*** al poligonului va descrie în timpul rotației în jurul urmei ***Pv*** un arc de cerc care se va proiecta în adevărată mărime pe planul ***L*** şi, după perpendiculara dusă din ***m'*** la ***Pv***, pe planul ***V***. Urmând construcțiile grafice respective indicate în figură prin săgeți, se obține în m_1 n_1 r_1 poligonul de secțiune în adevărată mărime.

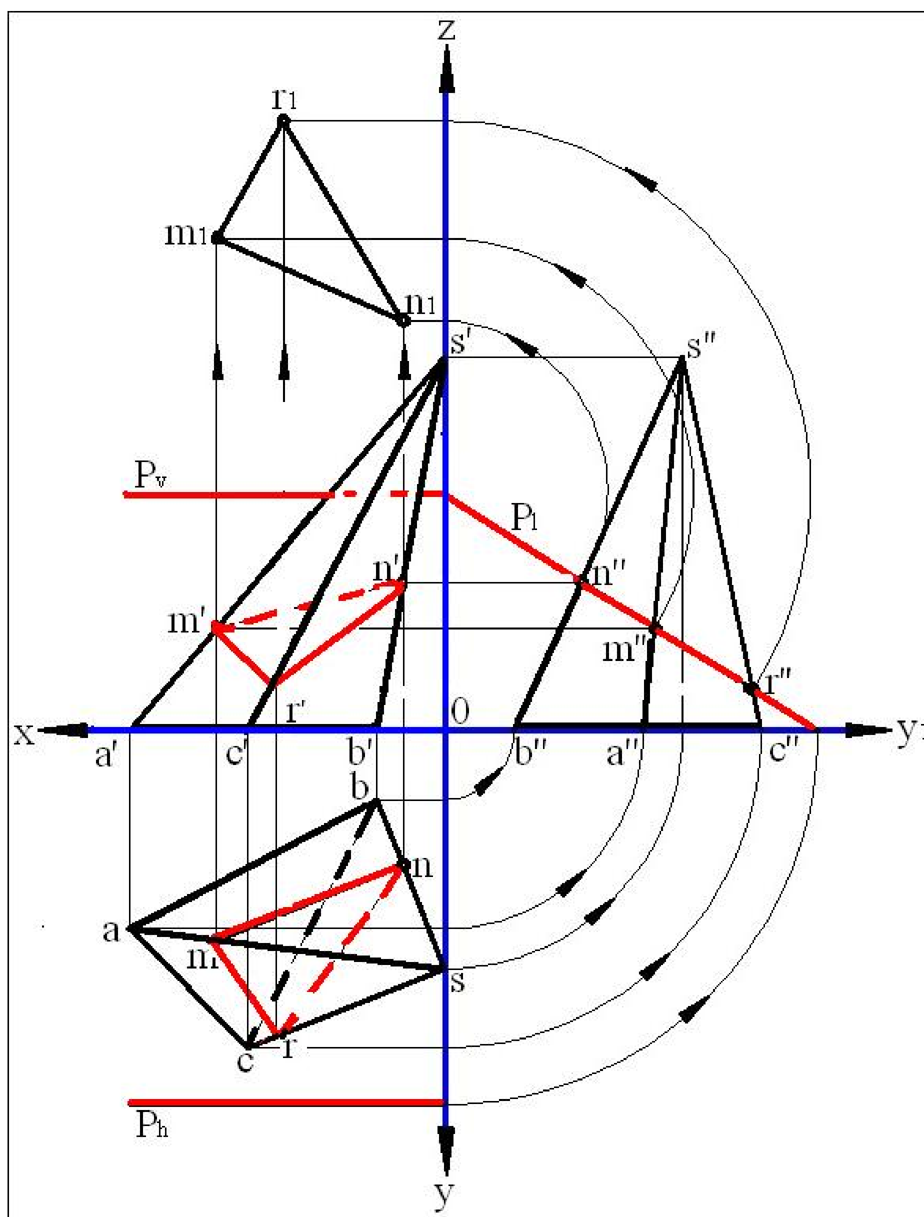


Fig. 5.18. Aplicația 3.

4) Să se determine poligonul după care un plan oarecare intersectează o piramidă dreaptă.

Rezolvare:

Fie ***abcs, a'b'c's'*** (figura 5.19) piramida dreaptă cu baza în planul ***H*** şi ***Ph, Pv*** planul secant oarecare. Problema poate fi rezolvată, aşa cum s-a arătat, fie căutând vârfurile poligonului de intersecție, adică determinând punctele în care muchiile piramidei intersectează planul ***Ph, Pv***, fie determinând laturile poligonului, adică intersectând fețele poliedrului cu planul ***Ph, Pv***. Uneori este mai convenabil să se schimbe unul din planele de proiecție, astfel încât planul secant să devină proiectant față de acesta, şi atunci problema se reduce la aceea cunoscută a intersecției unui poliedru cu un plan proiectant.

Astfel, dacă se schimbă planul ***V*** aşa încât să devină perpendicular pe planul ***Ph, Pv*** (noua linie a pământului O_1x_1 se ia perpendiculară, pe ***Ph***), piramida îşi schimbă proiecția verticală în $a_1'b_1'c_1's_1'$, iar planul ***P*** ajunge cu urma verticală în Pv_1. Față de noul sistem de proiecție, planul secant a devenit proiectant, deci poligonul de secțiune se proiectează pe planul V_1, în $m_1'r_1'n_1'$ pe urma Pv_1. Pornind de la $m_1'r_1'n_1'$ cu linii de ordine se obține întâi în ***mnr*** proiecția orizontală şi de aici, în ***m'n'r'***, proiecția verticală a poligonului.

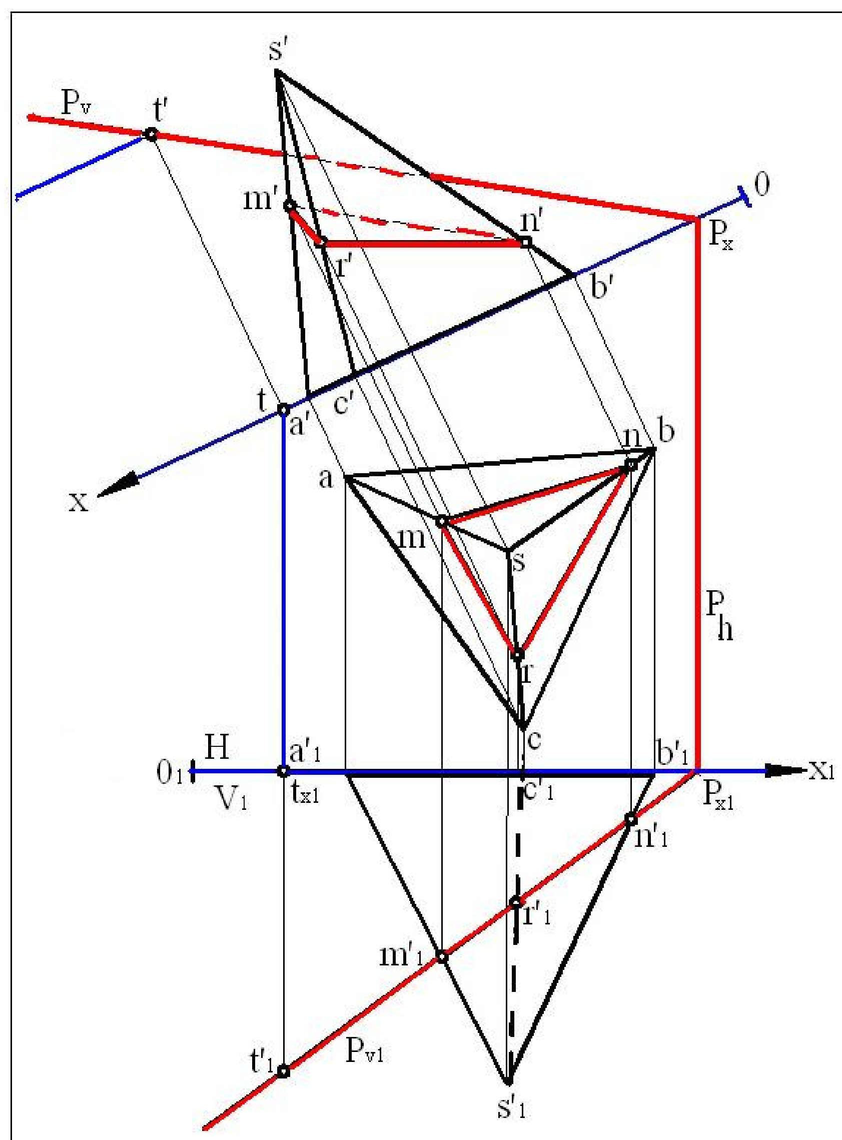


Fig. 5.19.Aplicația 4.

5) Cunoscând lungimile muchiilor unei piramide, să se determine cele două proiecții ale acesteia.

Rezolvare:

Fie ***AB, BC, CA, SA, SB*** şi ***SC*** (figura 5.20) lungimile date pentru muchii. Pentru rezolvarea problemei se presupune piramida aşezată cu baza ***ABC*** în planul ***H*** şi se construieşte desfăşurata ei pe planul bazei. Pentru aceasta se amplasează ***ABC*** într-o poziție oarecare în ***abc*** şi apoi pe fiecare din laturile ***ab, bc*** şi ca se construiesc fețele laterale desfăşurate respectiv în ***abs₁***, ***bcs₂*** şi ***cas₃***. Cele trei fețe laterale desfăşurate pot fi considerate ca rezultând din rabaterea fețelor piramidei pe planul ***H*** respectiv în jurul muchiilor ***AB, BC*** şi ***CA***. În acest caz proiecția ***s*** a vârfului se va găsi la intersecția perpendicularelor duse din ***s₁, s₂*** şi ***s₃*** respectiv la ***ab, bc*** şi ***ca***. Unind pe ***s*** astfel determinat cu ***a, b*** şi ***c*** se obțin şi proiecțiile pe planul ***H*** ale celor trei muchii laterale.

Pentru a construi proiecția verticală a piramidei, se duc întâi liniile de ordine din ***a, b*** şi ***c*** şi la intersecția cu ***Ox***, se obțin ***a', b'*** şi ***c'*** — proiecțiile vârfurilor poligonului de bază. Proiecția ***s'*** a vârfului poliedrului se găseşte pe linia de ordine ridicată din ***s*** la o cotă ce va trebui aflată. Pentru aceasta se duce prin muchia ***BS*** un plan vertical ***P*** cu urma ***Ph*** suprapusă peste ***bs*** şi se rabate pe planul ***H.*** Triunghiul dreptunghic format de muchia ***Bs***, proiecția ei ***bs*** şi înălțimea ***Ss*** a tetraedrului, fiind cuprins în planul ***P***, se rabate o dată cu acesta, în jurul catetei ***bs*** şi poate fi construit în ***bs s₃***, întrucât ***bs*** a rămas pe loc, ***bs₃*** este egală, cu lungimea muchiei ***BS***, iar ***ss₃*** se ştie că este perpendiculară pe ***bs***.

Cu ajutorul înălțimii piramidei obținute în ***ss₃*** în adevărată mărime se construieşte apoi şi proiecția ***s'*** a vârfului piramidei (înălțimea piramidei reprezintă de fapt cota vârfului ***S***) care, unită cu ***a', b'*** şi ***c'***, determină proiecțiile verticale ale celor trei muchii laterale.

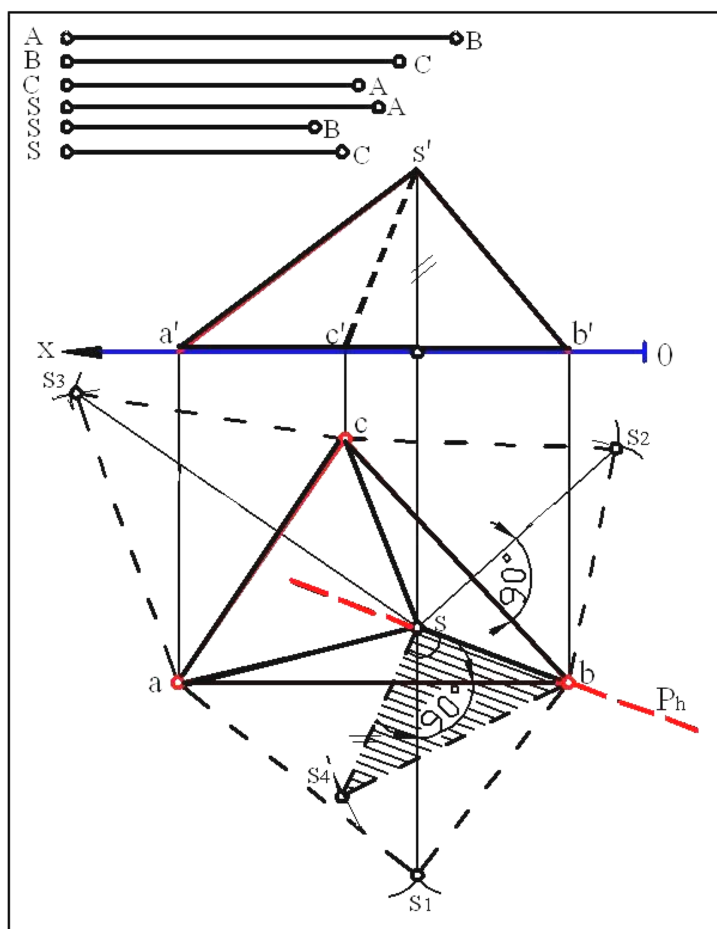


Fig. 5.20.Aplicația 5.

6. CORPURI DE ROTAȚIE

6.1. Generalități. Reguli de reprezentare.

Reprezentarea în epură, în triplă proiecție ortogonală a principalelor corpuri de rotație de secțiune dreptă, cilindrul, conul, trunchiul de con şi sfera, se prezintă în figura 6.1.a.b.c.d.

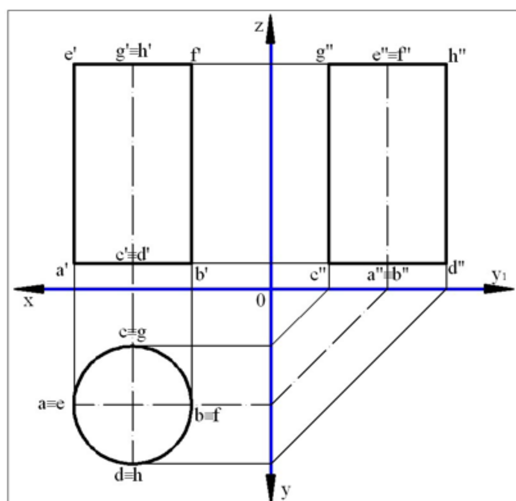


Fig.6.1.a. Cilindrul.

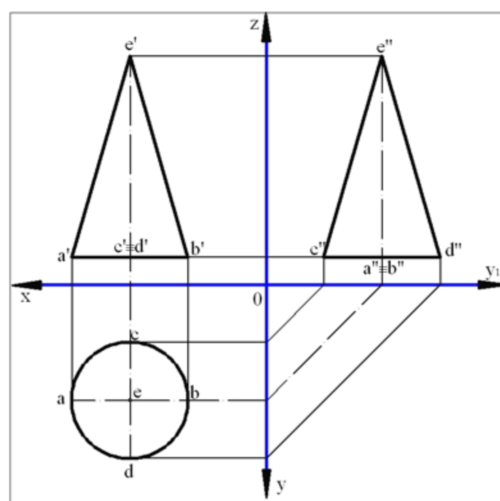


Fig.6.1.b. Conul.

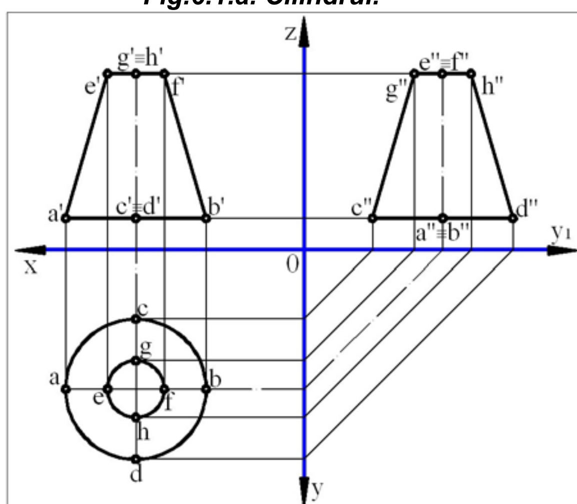


Fig.6.1.c. Trunchi de con.

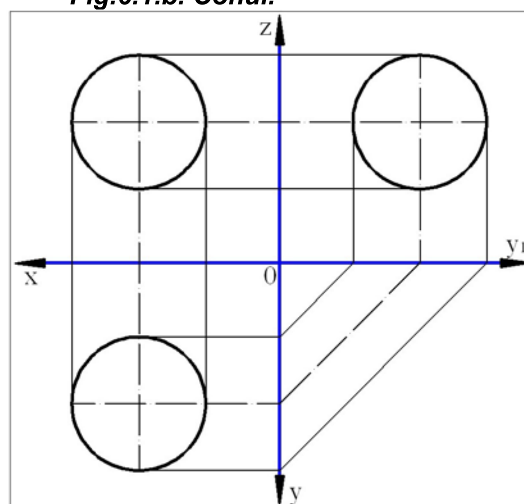


Fig.6.1.d. Sfera.

6.1.2. Conul oblic

Pentru a reprezenta un con oblic în epură (figura 6.2.), se fixează în cele două proiecții punctul director ***s,s'*** prin care trec toate generatoarele şi curba directoare ***abcd***, ***a'b'c'd'***, care se ia chiar urma suprafeței pe planul ***H***. Se construiesc apoi generatoarele de contur aparent care sunt diferite pentru cele două proiecții.

Astfel, cele din plan orizontal sunt cele două tangente ***sa*** şi ***sb*** duse din ***s*** la curba ***abcd***; generatoarele de contur aparent vertical sunt ***s'c'*** şi ***s'd'***, care se determină cu ajutorul proiecțiilor ***c*** şi ***d*** , punctele în care liniile de ordine sunt tangente la curba ***acbd***.

Cu ajutorul generatoarelor de contur aparent se delimitează şi porțiunile văzute şi nevăzute din suprafață. În proiecția orizontală, arcul de curbă ***acb***, precum şi toate generatoarele care pornesc din puncte aparținând acestei porțiuni din curbă (de exemplu ***cs***, ***c's'***) vor fi nevăzute. În mod similar pentru proiecția verticală, porțiunea ***d'a'c'*** corespunzând arcului ***dac***, precum şi toate generatoarele care pornesc de pe ea (de exemplu ***as, a's'***) vor fi nevăzute.

Reprezentând astfel conul, se obține o imagine intuitivă care permite în acelaşi timp determinarea imediată a oricărui punct de pe suprafață.

Dacă ***m'*** este proiecția verticală a unui punct oarecare, pentru ca acesta să se găsească pe suprafață, trebuie să aparțină unei generatoare a acesteia. Se duce întâi proiecția verticală ***s'g'*** a generatoarei trecând prin ***m'*** şi se determină proiecția orizontală ***gs*** cu ajutorul lui ***gg'*** de pe curba directoare; apoi cu linia de ordine coborâtă din ***m'*** se găseşte în ***m***, la intersecția cu ***gs***, proiecția orizontală a punctului căutat, întrucât proiecției verticale ***g's'*** îi corespund două proiecții orizontale ***gs*** şi ***js***, rezultă că şi lui ***m'*** îi vor corespunde ***m*** pe ***gs*** şi m_1 pe ***js***.

6.1.3. Cilindru oblic

Un cilindru oblic în epură se reprezintă urmând aceleaşi reguli (figura 6.3). Generatoarele cilindrului fiind paralele cu o direcție oarecare, pentru a găsi conturul aparent orizontal al suprafeței, se duc tangentele la curba ***acbd***, paralele cu proiecția orizontală a direcției date.

Generatoarele de contur aparent vertical au drept urme orizontale punctele ***c, c'*** şi ***d, d'*** determinate cu ajutorul liniilor de ordine tangente la urma ***acbd*** a suprafeței şi sunt paralele cu direcția dată. Şi în acest caz un punct ***mm'*** se va găsi pe suprafață dacă va aparține unei generatoare a suprafeței.

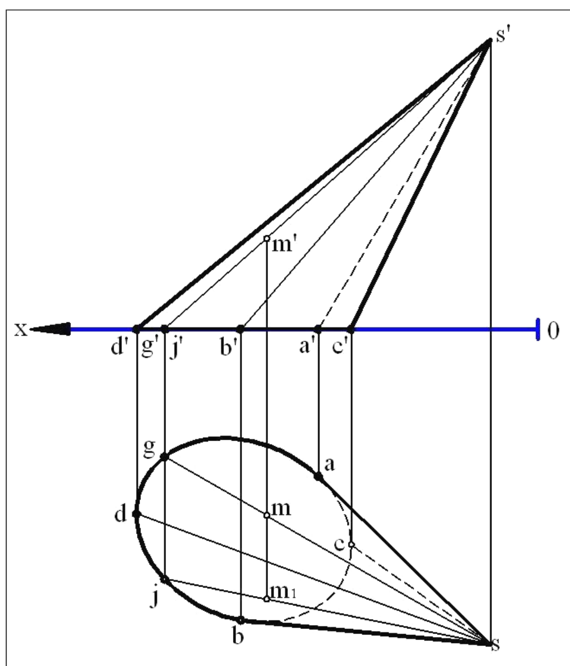


Fig.6.2.Con oblic.

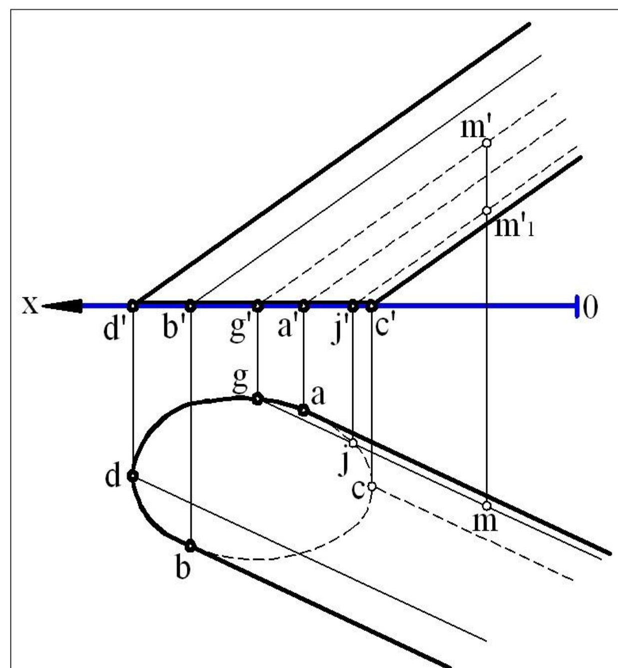


Fig.6.3. Cilindru oblic.

6.1.4. Sfera

Pentru a reprezenta o sfera de rază dată (figura 6.4.) cu centrul într-un punct oarecare ***g, g'*** se trasează contururile aparente ale suprafeței, care sunt două cercuri mari cu centrele în ***g*** respectiv ***g'***. Cercul din planul ***H*** este proiecția secțiunii făcute prin centrul sferei cu un plan de nivel, iar cercul din planul ***V*** este proiecția secțiunii făcute prin centrul sferei cu un plan de front. Cele două cercuri de secțiune poartă respectiv numele de ecuator şi meridian principal. Ele nu corespund în epură: ecuatorul se proiectează pe planul ***H*** după cercul de contur aparent orizontal, iar pe planul ***V***, după segmentul ***a'b'***; meridianul principal se proiectează pe planul ***V*** după cercul de contur aparent vertical, iar pe planul ***H*** după segmentul ***ab***.

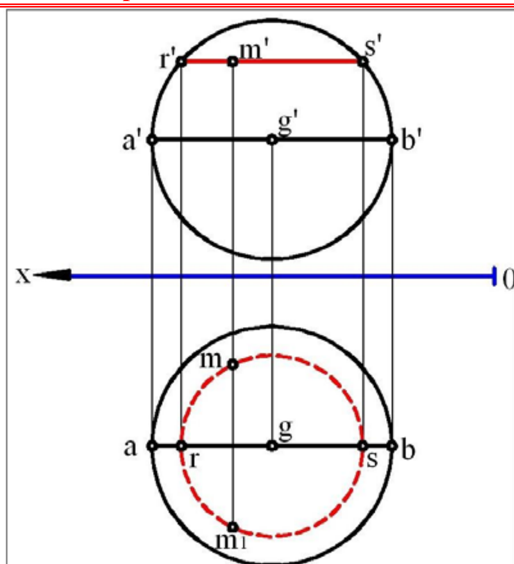


Fig.6.4. Punct M de pe sferă.

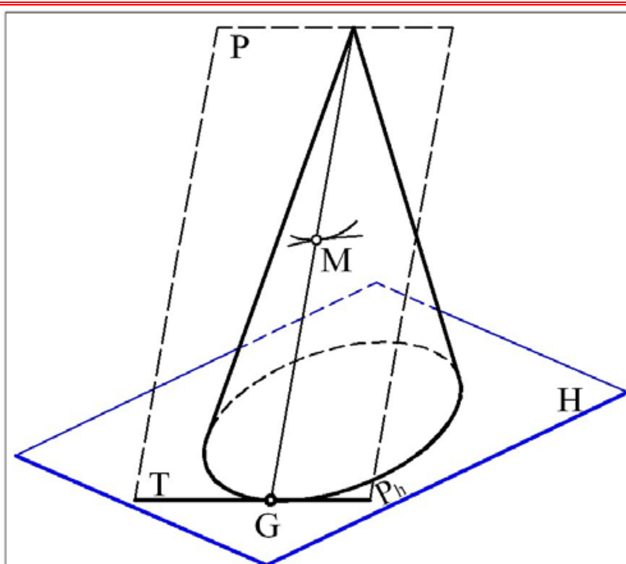


Fig.6.5.Plan tangent la con.

Pentru a reprezenta un punct oarecare de pe sferă, se situează punctul pe o curbă de pe sferă (de exemplu un cerc de nivel), care se va proiecta pe planul ***V*** după segmentul ***r's'*** paralel cu ***Ox***, iar pe planul ***H***, în adevărata mărime după cercul cu centrul în ***g*** şi diametrul ***rs*** egal cu ***r's'***. Dacă se ia un punct ***m, m'*** având proiecțiile pe proiecțiile de acelaşi nume ale cercului de nivel, se obține tocmai punctul căutat de pe suprafața sferei. Este de remarcat că unei proiecții verticale ***m'*** îi corespund două proiecții orizontale ***m*** şi m_1 care satisfac condiția impusă. Punctele ***m, m'*** şi m_1, ***m'*** sunt pe aceeaşi dreaptă de capăt şi deci se proiectează pe planul ***V***, suprapuse în ***m'*** pe urma verticală a dreptei de capăt.

6.2. Plane tangente la suprafață

Planul tangent într-un punct ***M*** al unei suprafețe cilindro-conice (figura 6.5) este tangent la suprafață în orice punct al generatoarei duse prin punctul dat. El este determinat de generatoarea care trece prin punct şi de tangenta la curba directoare în punctul în care această generatoare intersectează directoarea.

Dacă directoarea suprafeței este situată în planul ***H*** (figura 6.5.), tangenta ***T*** la aceasta va trece prin urma orizontală ***G*** a generatoarei şi va constitui chiar urma orizontală ***Ph*** a planului tangent la suprafață de-a lungul generatoarei ***SG***.

a) Plan tangent la un con circular oblic cu baza în planul *H* şi vârful în *s, s'* (figura 6.6).

Se dă ***m,m'*** un punct oarecare de pe suprafața conului. Planul tangent la con în punctul ***m, m'*** va fi determinat de generatoarea ***sg***, ***s'g'*** care trece prin ***m,m'*** şi de tangenta ***t,t'*** dusă la cercul director al conului în punctul ***g,g'*** în care generatoarea ***sg, s'g'*** intersectează directoarea. Tangenta ***t,t'*** fiind situată în planul ***H***, va constitui chiar urma orizontală ***Ph*** a planului tangent. Punctul ***Px*** în care urma ***Ph*** intersectează pe ***Ox*** este un punct al urmei verticale. Pentru a găsi un al doilea punct necesar pentru determinarea urmei ***Pv*** se caută urma verticală ***j,j'*** a generatoarei ***sg, s'g'*** care este şi ea o dreaptă aparținând planului tangent. Unind pe ***Px*** cu ***j'*** se obține şi urma ***Pv*** a planului tangent.

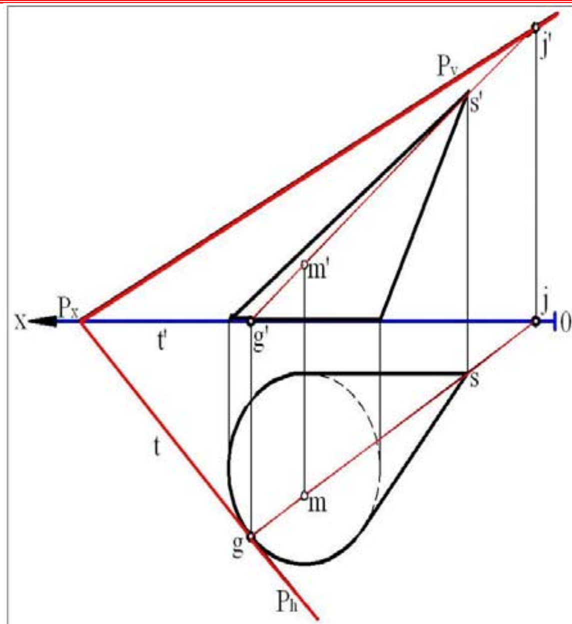


Fig.6.6.Plan tangent T la con.

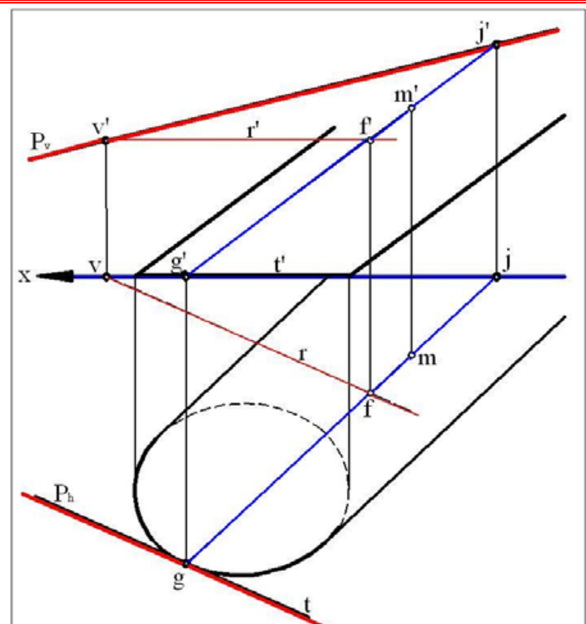


Fig.6.7.Plan tangent T la cilindru.

b) Plan tangent la un cilindru oarecare (figura 6.7).

Şi în acest caz generatoarea ***gm, g'm'*** şi tangenta ***t,t'*** la directoare determină planul tangent. Deoarece ***Ph*** nu s-a întâlnit cu ***Ox*** în cadrul epurei, s-a utilizat pentru determinarea celui de-al doilea punct ***v,v'*** al urmei ***Pv***, o orizontală ***r,r'*** aparținând planului tangent, dusă printr-un punct ***f,f'*** luat arbitrar pe generatoarea ***gm***, ***g'm'***, (***r*** se duce paralelă cu ***Ph*** şi trecând prin ***f***, iar ***r'*** paralelă cu ***Ox*** şi trecând prin ***f'***).

c) Plan tangent într-un punct situat pe o sferă (figura 6.8).

Se ține seama că acesta trebuie să fie perpendicular pe raza sferei dusă prin punctul considerat. Astfel, fie sfera de centru ***c,c'*** şi un punct oarecare ***m,m'*** situat pe sferă, cu proiecțiile determinate cu ajutorul cercului de nivel de diametru ***ab, a'b'***. Unind pe ***m*** cu ***c*** şi pe ***m'*** cu ***c'***, se obțin cele două proiecții ale razei cercului. Planul tangent în ***m,m'*** la sferă fiind perpendicular pe raza ***cm***, ***c'm'***, rezultă că va avea urma ***Ph*** perpendiculară pe ***cm***, iar urma ***Pv*** pe ***c'm'***. Pentru a putea trasa cele două urme de direcții cunoscute este suficient să se cunoască un punct aparținând uneia din ele. Pentru determinarea acestuia se duce prin ***m,m'***, spre exemplu, o orizontală ***s,s'*** a planului tangent (***s*** perpendiculară pe ***cm*** şi trecând prin ***m***, iar ***s'*** paralelă la ***Ox*** şi trecând prin ***m'***) şi se determină urma ei verticală ***v,v'***. Urma verticală ***Pv*** a planului tangent va trebui să treacă prin ***v'*** şi să fie perpendiculară pe ***c'm'***, iar urma orizontală ***Ph*** se va duce prin ***Px*** perpendiculară pe ***cm***.

6.3. Secțiuni plane în suprafețe curbe

Un plan oarecare secționează o suprafață după o linie care se poate determina în epură urmând metodele stabilite la secțiunile plane în poliedre.

Dacă se consideră suprafața ca derivând din poliedrul corespunzător (spre exemplu conul ca derivând dintr-o piramidă, cilindrul dintr-o prismă) căruia i s-au mărit indefinit numărul muchiilor, acestea din urmă devin generatoarele suprafeței şi atunci punctele aparținând curbei de secțiune plană sunt punctele în care generatoarele intersectează planul secant dat.

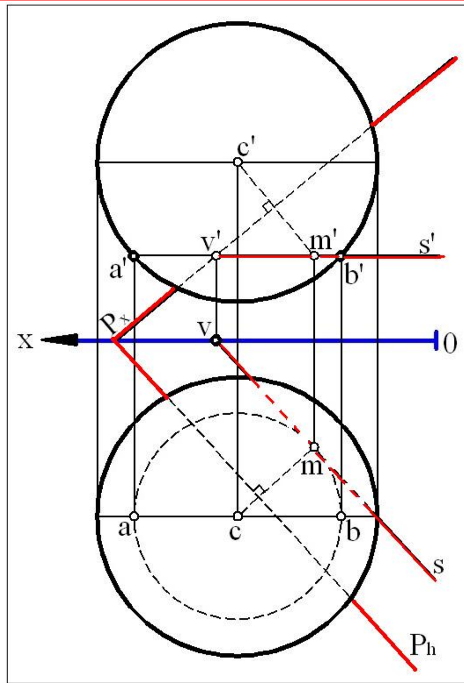


Fig.6.8.Plan tangent la sferă.

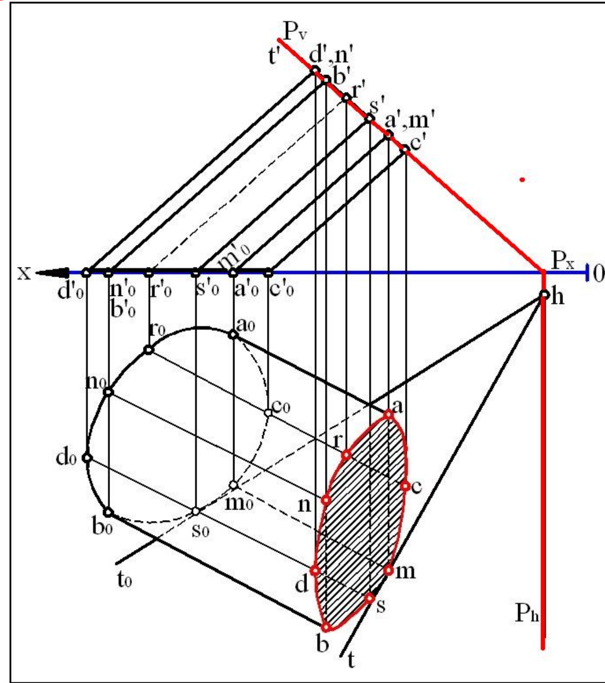


Fig.6.9.Cilindru secționat cu plan de capăt.

6.3.1. Secțiuni cu plane proiectante.

1. Un cilindru oarecare secționat de un plan de capăt (figura 6.9).

Pentru determinarea curbei de secțiune se alege un număr oarecare de generatoare (cât mai numeroase pentru a putea trasa curba cu suficientă precizie) şi se determină punctele în care aceste generatoare intersectează planul secant ***Ph, Pv***.

S-au luat în considerare întâi generatoarele de contur aparent orizontal şi vertical. Generatoarea a_0a, $a_0'a'$ intersectează planul ***Ph, Pv*** în punctul ***a,a'*** (care se găseşte în acelaşi timp pe $a_0'a'$ şi pe urma ***Pv***). Urmând acelaşi raționament, se obțin apoi pe generatoarele respective şi punctele ***b,b'***; ***c,c'*** şi ***d,d'***. Cele patru puncte determinate nu sunt însă suficiente pentru trasarea curbei şi atunci se mai iau şi alte generatoare, pe cât posibil astfel alese încât să se utilizeze cât mai mult liniile deja existente în epură.

Astfel, generatoarea care porneşte din m_0, m_0' are proiecția verticală suprapusă peste $a_0'a'$, după cum generatoarea care porneşte din s_0, s_0' are proiecția orizontală suprapusă peste d_0d etc. Se mai obțin astfel cu ajutorul generatoarelor care pornesc din punctele m_0,m_0'; n_0,n_0'; r_0,r_0' şi s_0,s_0' încă patru puncte de pe curbă, respectiv ***m, n, r*** şi ***s***. Cunoscând acum opt puncte aparținând curbei şi ținând seama şi de faptul că în punctele ***a*** şi ***b*** proiecția acesteia este tangentă respectiv la a_0a şi b_0b, iar în punctele ***c*** şi ***d*** tangentă la liniile de ordine corespunzătoare, rezultă că proiecția orizontală a curbei se poate trasa cu suficientă precizie.

Pentru a duce tangenta într-un punct oarecare al curbei de secțiune se ține seama că aceasta trebuie să fie în acelaşi timp în planul de secțiune cât şi în planul tangent la suprafață în punctul considerat (curba de secțiune se găseşte pe suprafață). Deci tangenta este chiar dreapta de intersecție a celor două plane.

Fie ***s,s'*** punctul în care trebuie construită tangenta. Cele două plane care o determină sunt ***Ph, Pv*** (planul curbei) şi planul tangent la suprafață după generatoarea $ss_0\ s's_0'$; urmele lor orizontale sunt ***Ph*** respectiv t_0. Proiecția orizontală ***t*** a tangentei căutate este determinată de punctul ***s*** şi de punctul ***h*** , intersecția urmelor orizontale ale celor două plane.

2. Un con oarecare intersectat de un plan proiectant. Construcție absolut analogă.

3. Un plan de capăt secționează o sferă de centru f, f (figura 6.10) după un cerc mic, care se proiectează pe planul ***V*** după segmentul ***a'b'*** iar pe planul ***H*** după o elipsă (cercul de secțiune este oblic față de planul ***H***).

Pentru a găsi cele două axe ale **elipsei** necesare pentru trasare se observă că:

- centrul elipsei se găseşte în punctul ***g,g'*** (***g'*** este la mijlocul segmentului ***a'b'***, iar ***g*** la intersecția liniei de ordine corespunzătoare cu ***mn***);

- axa mare a elipsei se obține proiectând pe planul ***H*** diametrul orizontal al cercului de secțiune; grafic, se duce prin ***g*** o paralelă la ***Ph*** şi pe aceasta se poartă apoi în ***cd*** simetric față de ***g***, lungimea diametrului cercului, care se găseşte în adevărată mărime în ***a'b'***;

- axa mică a elipsei este proiecția diametrului cel mai înclinat față de planul ***H*** al cercului de secțiune, deci diametrul frontal ***ab, a'b'*** care se proiectează vertical în adevărată mărime.

Elipsa-proiecție va fi tangentă la cercul de contur aparent orizontal al sferei, în două puncte, ***r*** şi ***s***. Cercul de contur aparent orizontal reprezintă de fapt secțiunea făcută prin sferă cu planul de nivel care trece prin centrul ei (urma verticală ***m'n'***). Acest cerc are punctele ***r,r'*** şi ***s,s'*** comune cu cercul de secțiune cuprins în planul ***P***. Deci în proiecție orizontală atât ***r*** cât şi ***s*** trebuie să fie pe ambele curbe.

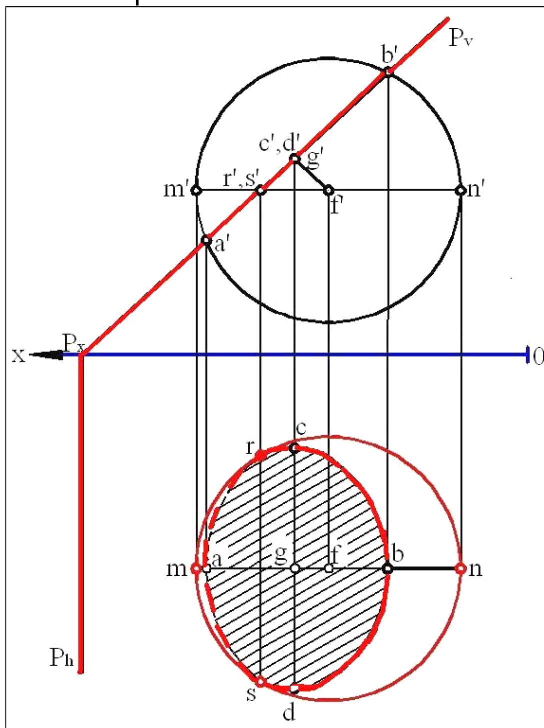


Fig.6.10.Sfera secționată cu plan de capăt.

Punctele ***r*** şi ***s*** separă şi porțiunea văzută de cea nevăzută a elipsei-proiecție. În proiecția pe planul ***H*** se văd toate punctele de pe emisfera superioară (deasupra ecuatorului), deci porțiunea ***rcbds***. Arcul ***sar*** este nevăzut deoarece se găseşte sub ecuator.

6.3.2. Secțiuni cu plane oarecare

Pentru a obține curba după care un plan oarecare secționează o suprafață cilindro-conică, se caută punctele în care generatoarele suprafeței intersectează planul dat şi se unesc apoi între ele printr-o curbă continuă. Pentru a putea trasa curba cu suficientă precizie este bine să se recurgă la un număr cât mai mare de generatoare astfel alese, încât punctele de intersecție rezultate să acopere toate zonele curbei. De un real folos pentru trasare sunt apoi şi tangentele la curbă.

1. Un con oblic intersectat cu un plan oarecare P (figura 6.11).

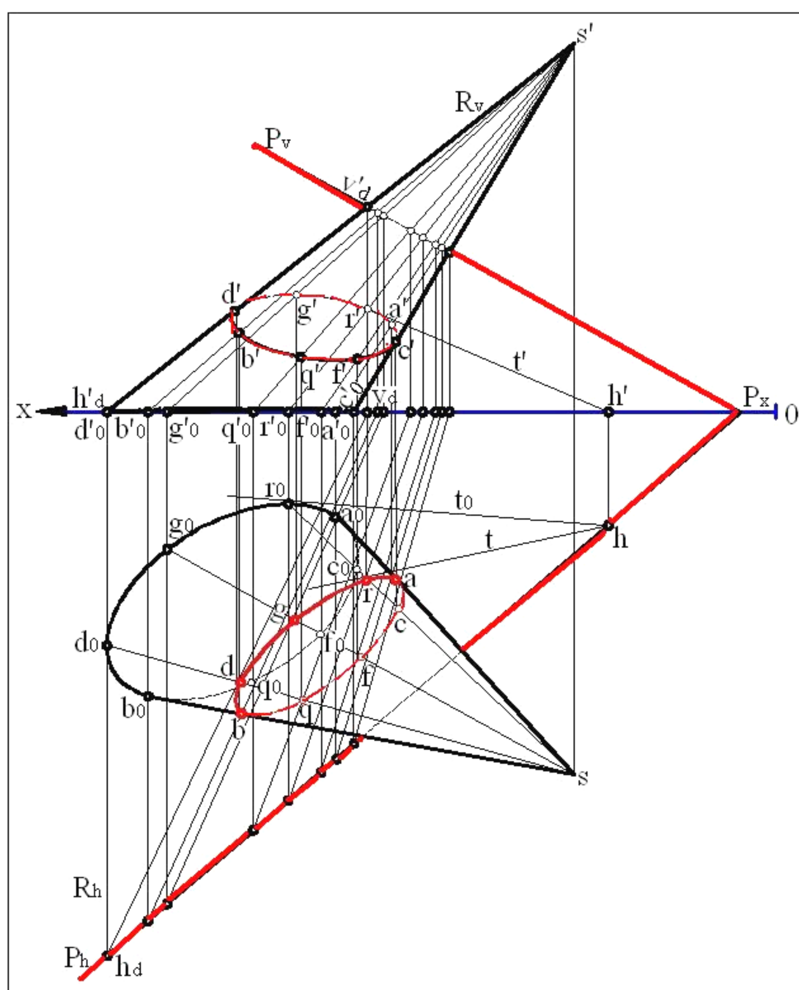


Fig.6.11.Con intersectat cu plan.

Între generatoarele care se aleg pentru determinarea punctelor aparținând curbei de intersecție trebuie să fie în primul rând cele de contur aparent, deoarece în proiecția respectivă ele sunt tangente la curbă în punctele de intersecție.

Pentru a obține punctul în care generatoarea de contur aparent vertical **d_0s, $d_0's'$** intersectează planul ***P*** se duce prin această generatoare planul de capăt ***R*** şi se intersectează cu planul ***PhPv***, obținându-se dreapta ***hd vd***, ***h'd v'd***. Generatoarea **d_0s**, **$d_0's'$** şi dreapta ***hdVd***, ***h'dVd'*** au ca punct comun pe ***d, d'***, punctul de intersecție căutat.

Proiecția verticală a curbei de secțiune va trece prin ***d'*** şi va fi tangentă la **$d_0's'$**.

În mod similar, generatoarele de contur aparent **a_0s, $a_0's'$; b_0s, $b_0's'$; c_0s, $c_0's'$** conduc respectiv la punctele ***a,a', b,b', c,c'*** şi tangentele corespunzătoare. Pentru a putea trasa mai exact cele două curbe-proiecție s-au mai ales generatoarele **g_0s, $g_0'f'$; f_0s, $f_0's'$** etc.

Pentru a obține tangenta într-un punct oarecare *r,r'* de pe curbă s-a intersectat planul secant ***Ph, Pv*** cu planul tangent la suprafață în punctul considerat.

Tangenta ***t,t'*** a fost determinată cu ajutorul punctului dat ***r,r'*** şi al urmei ei orizontale ***h,h'***, rezultată la intersecția lui ***Ph*** cu urma orizontală **r_0h** a planului tangent.

2. O sferă secționată cu un plan oarecare (figura 6.12).

Se obține un cerc care se proiectează pe planele ***H*** şi ***V*** după două elipse. Cele două elipse-proiecție se pot construi fie prin puncte, fie determinând pentru fiecare elipsă axele respective.

Construcția elipselor prin puncte, folosind metoda planelor auxiliare:

Fie o sferă de rază ***mc, m'c'*** şi centru ***c, c'*** (figura 6.12) şi ***Ph, Pv*** planul de secțiune. Dacă se secționează atât sfera cât şi planul dat cu un plan de nivel oarecare ***Rv***, se obțin respectiv cercul ***s,s'*** şi orizontala ***d,d'*** care se intersectează în punctele ***a,a'*** şi ***b,b',*** având proiecțiile respective pe cele două elipse care trebuie trasate. Repetând operația cu mai multe plane se obțin punctele necesare pentru trasarea cu suficientă precizie a celor două elipse.

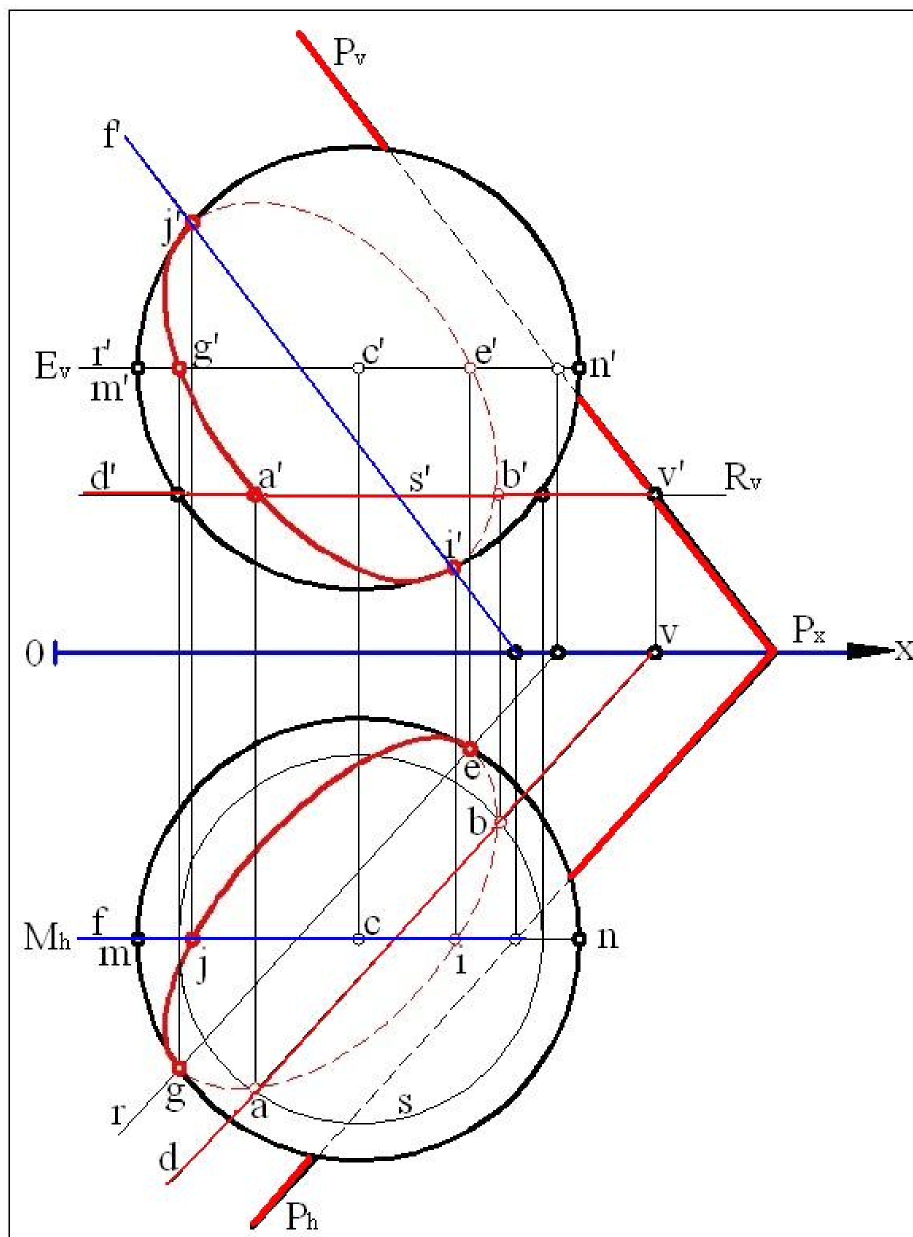


Fig.6.12.Sfera secționată cu un plan.

Este de observat că, dacă se utilizează ca plan de secțiune chiar planul ecuatorului ***Ev***, se obțin punctele-proiecție orizontală ***e*** şi ***g*** în care elipsa proiecție orizontală este tangentă interioară la cercul de contur aparent orizontal al sferei. În mod analog, planul meridianului principal ***Mh*** conduce la punctele-proiecție verticală ***j'*** şi ***i'*** comune elipsei-proiecție verticală şi cercului de contur aparent vertical al sferei. Punctele-proiecție ***g*** şi ***e***, respectiv ***j'*** şi ***i'*** mai sunt utile la trasarea elipselor şi pentru că separă zonele văzute de cele nevăzute ale acestora.

6.3.3. Secțiuni plane în conul de rotație

Secțiunile plane prin con dau naştere unei familii de curbe cunoscute sub numele de **conice**. Curba care se obține prin secțiune depinde de poziția planului secant față de generatoarele conului.

Astfel (figura 6.13), dacă planul secant ***P*** nu este paralel cu nici o generatoare a conului, el taie o singură pânză a acestuia după **o elipsă**, în cazul particular când planul (***Q***) este perpendicular pe axă, elipsa devine **un cerc**.

Dacă planul secant ***R*** este paralel cu o singură generatoare a conului, curba rezultată este **o parabolă.**

Dacă planul secant ***T*** este paralel cu două generatoare ale conului, el taie ambele pânze ale conului după o curbă cu două ramuri, **hiperbola.** În cazul particular când planul secant trece chiar prin axa conului, se obțin două drepte de secțiune (generatoare ale conului), adică **o hiperbolă degenerată**.

Cum se poate obține un cerc, o elipsă, o hiperbolă şi o parabolă, secționând un con circular drept cu axa verticală, cu plane particulare în diverse poziții?

a) Pentru a obține un cerc, conul circular drept cu vârful în *s,s'* se secționează cu un plan de nivel Qv (figura 6.14).

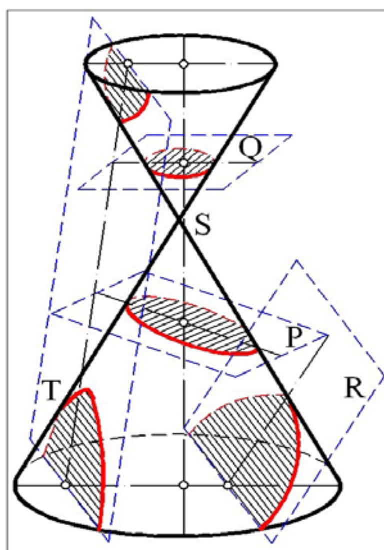


Fig.6.13. Conice.

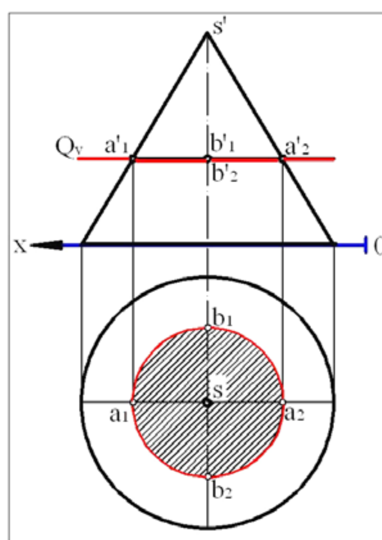


Fig.6.14. Secțiune tip cerc real.

Cercul de secțiune se proiectează în adevărată mărime pe planul ***H,*** deoarece este situat într-un plan paralel cu acesta, şi după segmentul ***a_1'a_2'*** pe planul ***V***. Acest segment reprezintă proiecția în adevărată mărime a diametrului frontal al cercului.

b) Elipsa se obține secționând conul cu un plan de capăt *Ph Pv* (figura 6.15) care taie toate generatoarele suprafeței.

Curba se proiectează pe planul ***V*** după segmentul ***a_1'a_2'*** şi are drept axă mare segmentul de front ce se proiectează în adevărată mărime în ***a_1'a_2'***. Axa mică este un segment de capăt ce se proiectează vertical în ***c'*** (mijlocul segmentului ***a_1'a_2'***), iar pe planul ***H*** în adevărată mărime după perpendiculara dusă la ***a_1a_2*** prin punctul ***c***.

Pentru a găsi mărimea axei mici se duce prin ***c,c'*** un plan de nivel care va secționa conul după cercul ***e'f'***, ***ef*** în care axa mică a elipsei va fi coarda de capăt ce trece prin punctul ***c,c'***. Rezultă că axa căutată se va proiecta orizontal în adevărată mărime, între punctele ***b_1*** şi ***b_2***, obținute la intersecția liniei de ordine corespunzătoare lui ***b_1'*** şi ***b_2'*** cu cercul ***ef, e'f'.***

Prin rabaterea planului secant ***Ph, Pv*** în jurul urmei ***Ph*** se poate obține pe planul ***H***, în $a_1b_1a_2b_2$ elipsa de secțiune în adevărată mărime.

c) Secționând conul cu un plan de capăt *Th,Tv* care taie ambele pânze ale suprafeței, se obține o hiperbolă cu una din ramuri între a_1' şi e_1', şi cealaltă între a_2' şi e_2' (figura 6.16) .

Cu ajutorul proiecțiilor verticale cunoscute şi al liniilor de ordine respective, se obțin şi proiecțiile orizontale corespunzătoare ale punctelor caracteristice ale curbei: în a_1 şi a_2, proiecțiile vârfurilor hiperbolei, şi în e_1, f_1, e_2, f_2, urmele orizontale ale curbei.
Orice puncte suplimentare necesare pentru trasarea curbei se pot obține cu ajutorul generatoarelor suprafeței.

Spre exemplu, proiecțiile ***m,m'*** ale unui punct curent de hiperbolă rezultă la intersecția generatoarei sj_2, $s'j_2'$ cu planul secant ***Th, Tv***.

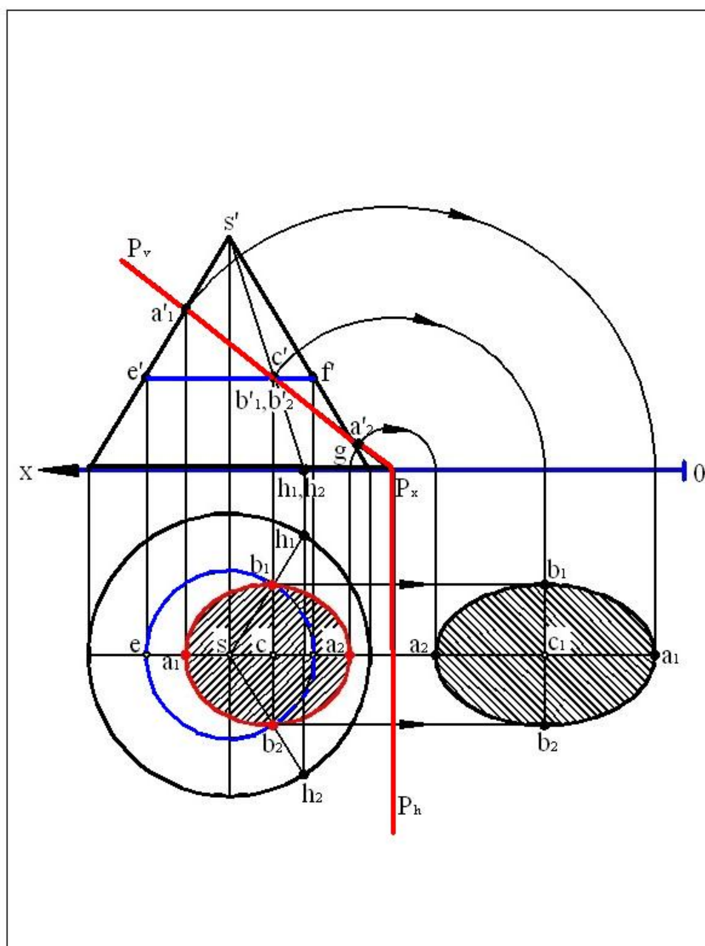


Fig.6.15. Secțiune tip elipsă.

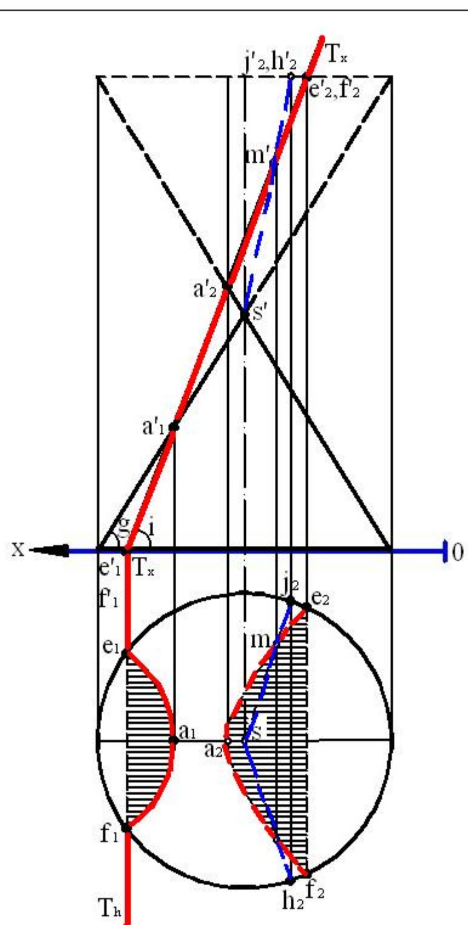


Fig.6.16. Secțiune tip hiperbolă.

d) Parabola se obține secționând un con având vârful în *s,s'* (figura 6.17) cu un plan de capăt *Rh, Rv* paralel cu una din generatoarele frontale ale suprafeței.

Curba se proiectează vertical pe urma ***Rv***, din ***a'*** până în ***e'***, în proiecția orizontală, punctele ***e*** şi ***f***, situate la intersecția urmei ***Rh*** cu cercul director, dau chiar urmele parabolei pe planul ***H***. Vârful parabolei este în ***a, a'***. Ducând o generatoare oarecare ***sh***, ***s'h'*** a suprafeței se poate obține un punct curent ***m, m'*** de pe parabolă.

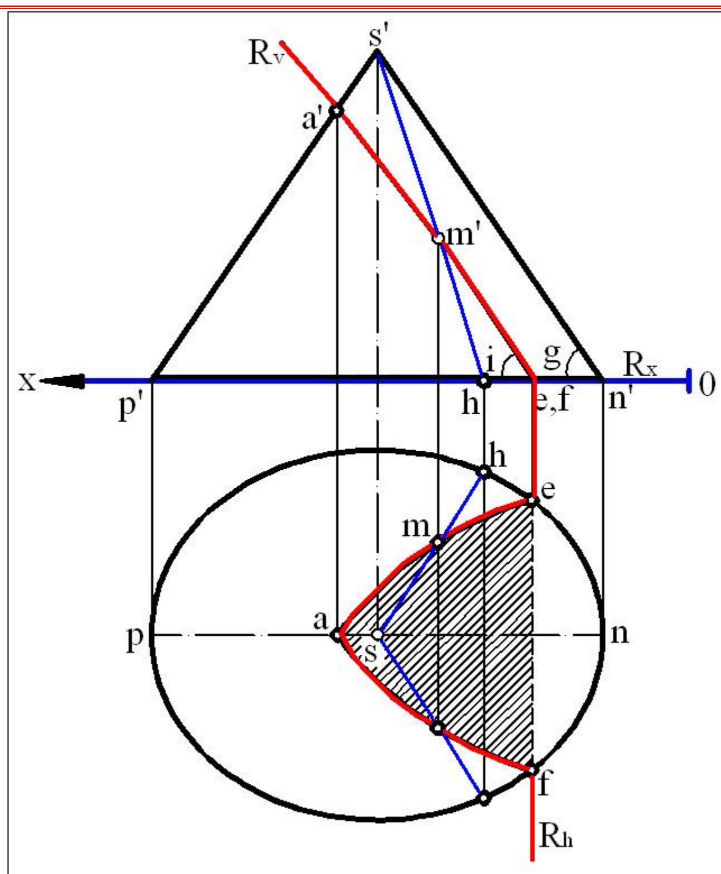


Fig.6.17.Secțiune tip parabolă.

Deoarece atât unghiul ***g*** al generatoarelor conului cu planul ***H***, cât şi unghiul ***i*** al planului secant cu planul ***H***, apar proiectate în adevărată mărime pe planul ***V***, se pot trage următoarele **concluzii:**

- dacă ***g*** este mai mare decât ***i***, secțiunea rezultată este o elipsă;
- dacă ***g*** este egal cu ***i***, se obține o parabolă, iar
- dacă ***g*** este mai mic decât ***i***, rezultă o hiperbolă.

6.4. Intersecții de drepte cu suprafețe curbe

Pentru determinarea punctelor în care o dreaptă oarecare intersectează o suprafață curbă se pot utiliza metodele indicate la capitolul „Intersecții de drepte cu poliedre".

Se duce prin dreaptă un plan care va intersecta suprafața după o curbă; punctele căutate se găsesc la intersecția dreptei cu curba aflată. Pentru trasarea curbelor oarecare este necesară determinarea unui număr mare de puncte ale acestora, se caută ca planul ce se duce prin dreaptă să fie astfel ales, încât secțiunea care rezultă în suprafață să fie cât mai uşor de construit. În cazul suprafețelor cilindro-conice este avantajos, din acest punct de vedere, să se utilizeze secțiunile longitudinale, adică să se ducă prin dreapta dată, plane care să taie suprafața în lungul a două generatoare.

6.4.1. Con oblic intersectat de o dreaptă oarecare (figura 6.18).

Printr-un punct oarecare ***a,a'*** de pe dreapta de intersecție ***d,d'*** şi vârful ***s,s'*** al conului se duce o dreaptă ***t,t'***. Cele două drepte concurente ***d,d'*** şi ***t,t',*** determină planul care trece prin ***d,d'*** şi intersectează conul după două generatoare. Urma orizontală ***Ph*** a planului secant (obținută unind pe ***h*** cu h_1) intersectează urma conului pe planul ***H***, în două puncte m_o şi n_o prin care se duc proiecțiile orizontale $m_o s$ şi $n_o s$ ale celor două generatoare de secțiune longitudinală căutate.

Punctele în care dreapta dată intersectează conul se obţin în proiecţie orizontală în ***m*** şi ***n***, la intersecţia lui ***d*** cu $m_o s$ respectiv $n_o s$. Proiecţiile verticale ***m'*** şi ***n'*** se găsesc pe ***d'*** cu ajutorul liniilor de ordine corespunzătoare.

Partea nevăzută a dreptei se limitează la segmentul ***mn, m'n'***, întrucât ambele generatoare de secţiune sunt văzute atât în proiecţia orizontală cât şi în cea verticală.

6.4.2. Intersecţia unei drepte cu un cilindru oblic (figura 6.19).

Se aplică aceeaşi metodă, diferenţa constă în aceea că dreapta auxiliară ***t,t'*** care determină împreună cu dreapta dată ***d,d'*** planul de secţiune longitudinală, se duce paralelă cu generatoarele cilindrului.

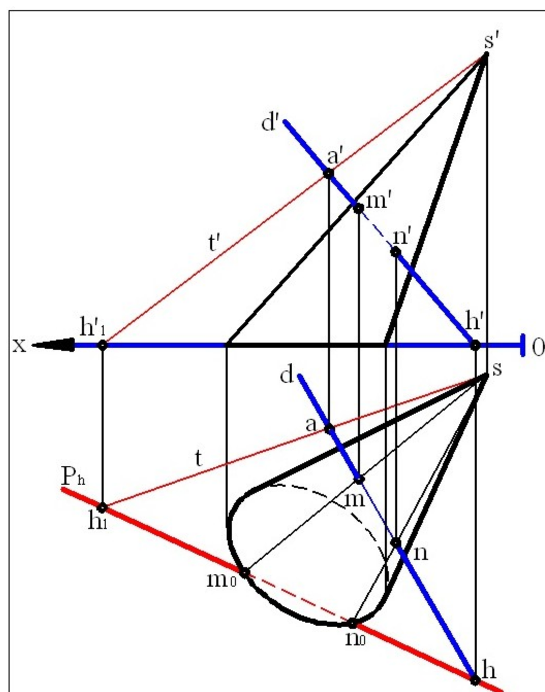


Fig.6.18 Conul stăpuns de dreapta D.

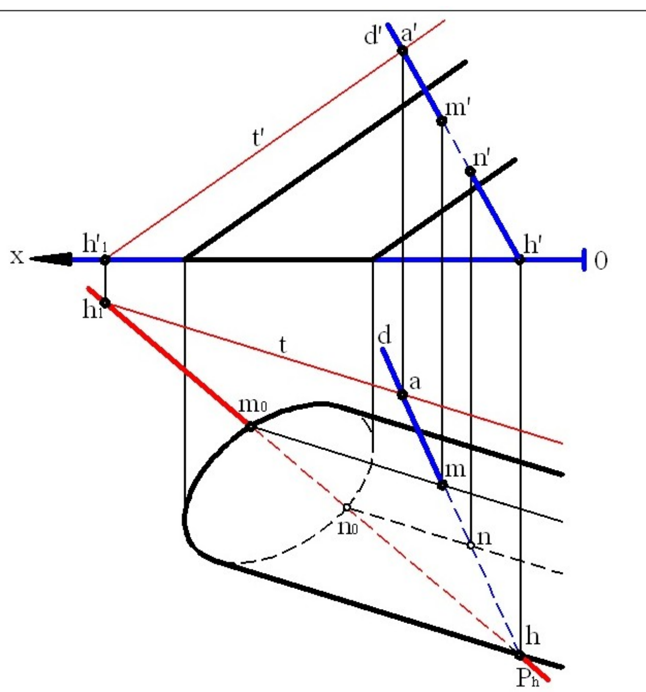


Fig. 6.19. Cilindrul străpuns de dreapta D.

6.4.3. O dreaptă oarecare intersectează o sferă (figura 6.20).

Se poate utiliza ca plan auxiliar, un plan proiectant dus prin dreapta ***d,d'*** dată. Problema se reduce deci la aceea cunoscută a determinării proiecţiilor curbei de secţiune. Pentru a evita trasarea elipsei-proiecţie se poate recurge la rabaterea planului de secţiune pe unul din planele de proiecţie. Calea de urmat în acest caz, în epură este următoarea:

Fie ***P*** un plan vertical ce se duce prin dreapta dată ***d,d'***. Acest plan secţionează sfera după un cerc mic proiectat pe planul ***H*** după segmentul a_1a_2 de pe urma ***Ph***. Rabatând planul ***P*** în jurul urmei ***Ph***, se obţine pe planul ***H*** cercul de secţiune în adevărată mărime. Dreapta ***d,d'*** aparţinând şi ea planului ***P***, se rabate o dată cu acesta în ***d***, cu ajutorul a două puncte de pe ea (***h,h' şi r, r'***). Cercul şi dreapta rabătute se intersectează în punctele căutate ***m*** şi ***n***. Ridicând planul în poziţia iniţială, se obţin, pornind de la ***m*** şi ***n***, cele două proiecţii ***m,m'*** şi ***n,n'*** ale punctelor căutate.

Pentru stabilirea **porţiunilor văzute şi nevăzute din dreaptă** se studiază poziţia pe sferă a punctelor ***m,m'*** şi ***n,n'*** în cele două proiecţii. Astfel, deoarece ***m,m'*** este pe emisfera superioară şi ***n,n'*** pe cea inferioară, ***m*** a_1 va apărea văzută, iar ***n*** a_2 nevăzută. De asemenea, deoarece atât ***m,m'*** cât şi ***n,n'*** sunt pe emisfera anterioară, numai porţiunea ***m'n'*** va apărea nevăzută în proiecţia verticală.

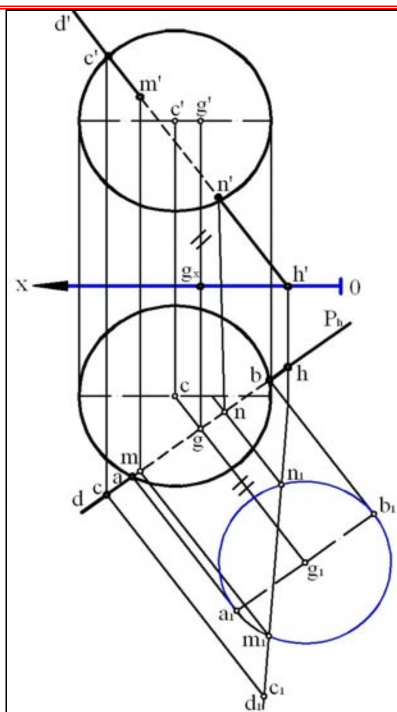


Fig.6.20.Sfera intersectată de dreapta dd'.

6.5. Desfăşurarea suprafeţelor curbe

Socotind suprafeţele cilindrice şi conice ca provenind din poliedre prismatice, respectiv piramidale, la care s-au înmulţit la infinit laturile poligoanelor directoare, toate metodele utilizate pentru desfăşurarea poliedrelor pot fi aplicate prin analogie şi la desfăşurarea suprafeţelor cilindro-conice.

6.5.1. Desfăşurata suprafeţei laterale a unui con circular drept (figura 6.21, a).

Se împarte cercul director al acestuia într-un număr cât mai mare de arce egale, considerând că fiecare arc, cu generatoarele care pornesc din extremităţile lui, formează una din feţele laterale ale piramidei asimilate cu conul dat. Având în vedere că toate feţele laterale astfel construite sunt egale între ele, desfăşurarea se face practic astfel:
Se construieşte întâi (figura 6.21, b) un arc de cerc cu centrul într-un punct oarecare ***S*** şi rază egală cu adevărata mărime a generatoarelor conului. Pe acest cerc se poartă apoi succesiv cele 12 lungimi ale arcelor măsurate pe cercul director al conului. Presupunând conul tăiat pentru desfăşurare după generatoarea ***s 7, s' 7'***, notarea arcelor desfăşurate se va face în ordinea ***7,6,...,2,1,2,...,6,7.*** Sectorul de cerc ***S 7 6...6 7 S*** astfel obţinut constituie desfăşurata suprafeţei laterale a conului.

6.5.2. Desfăşurata trunchiului de con**, **se obţine în mod analog cu ajutorul desfăşuratei conului din care a fost tăiat trunchiul.

Fie un con circular drept (fig. 6.21, a) şi ***Ph, Pv*** planul de capăt secant care limitează împreună cu planul ***H*** trunchiul de con care trebuie desfăşurat.

Se construieşte întâi (figura 6.21, b) desfăşurata conului aşa cum s-a arătat mai sus. Se caută apoi adevărata mărime a porţiunilor din generatoarele conului aflate sub planul secant ***Ph, Pv***. Pentru aceasta, se roteşte fiecare generatoare în parte în jurul axei conului până când ajunge paralelă cu planul ***V***, adică se suprapune peste ***s7, s'7'***. În această poziţie generatoarele tăiate apar în adevărată mărime în proiecţia verticală, în ***7'VII', 7'VI'***, ***7'V*** ' etc. Segmentele astfel obţinute se raportează apoi pe generatoarele respective de pe desfăşurată.

Curba ***VII-VI-V-...- I -...-V-VI-VII*** ce se obține unind punctele aflate limitează desfăşurata trunchiului de con la partea superioară, constituind de fapt desfăşurata curbei de secțiune a conului cu planul ***Ph, Pv***.

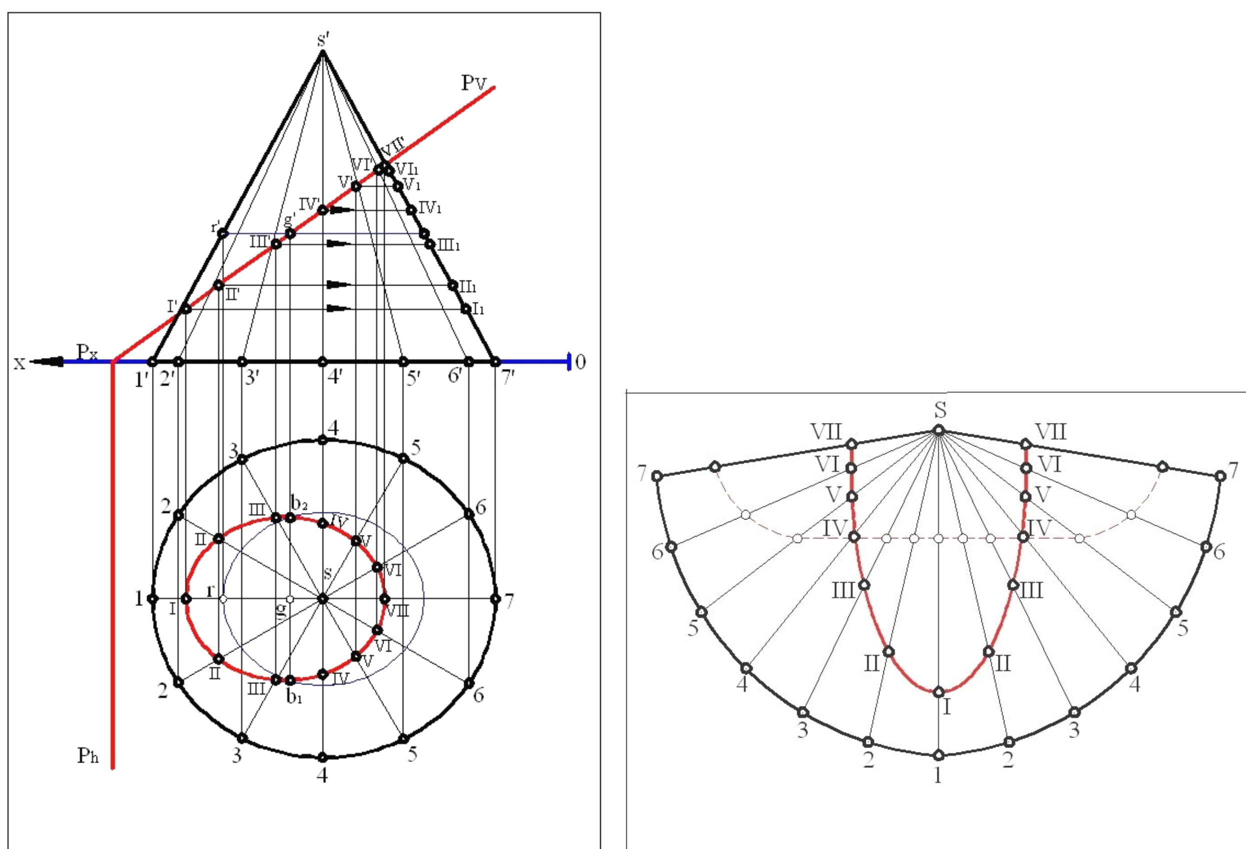


Fig.6.21. Conul şi trunchiul lui desfăşurat.

Trebuie remarcat că nu este indiferent pe unde se taie trunchiul de con pentru a fi desfăşurat. Astfel, dacă se tăia conul, nu după generatoarea ***s7, s' 7'***, aşa cum s-a făcut pentru a obține desfăşurata din figura 6.21,b, ci după ***s1, s'1'***, curba de secțiune ar fi luat un alt aspect în desfăşurare (în epură cu linii întrerupte).

Acest lucru prezintă importanță în practică întrucât dacă se punea, spre exemplu, problema construirii suprafeței dintr-o foaie de tablă, s-ar fi ales desfăşurarea după generatoarea ***s1, s'1'*** (cu linii întrerupte în epură), deoarece permite tăierea desfăşuratei dintr-o foaie dreptunghiulară de înălțime mai mică decât prima şi deci realizarea unei economii de tablă.

6.5.3. Desfăşurata suprafeței laterale a unui cilindru circular drept, (fig. 6.22, a, b)

Se împarte cercul director al suprafeței în arce egale (în număr de 8 în epură) şi se raportează aceste lungimi pe o dreaptă oarecare ***AA***. În punctele ***A, B, . . .*** astfel obținute se ridică apoi, perpendicular pe ***AA***, generatoarele care apar proiectate în adevărată mărime pe planul ***V***. Din construcția făcută rezultă că desfăşurata suprafeței laterale a unui cilindru circular drept de rază ***r*** şi înălțime ***l*** este un dreptunghi de bază ***2π r*** şi înălțime ***l***.

Dacă pe desfăşurata astfel construită se duce diagonala ***I-IX*** a dreptunghiului, care face acelaşi unghi ***i*** cu toate generatoarele cilindrului, şi se reconstituie apoi cilindrul cu ajutorul desfăşuratei, dreapta ***I-IX*** apare pe suprafața laterală a cilindrului ca o curbă de forma ***1,1'- 2,2'- ...- 9,9'***, care se numeşte **elice cilindrică.**

În epură, pentru a construi proiecția verticală a elicei (cea orizontală este chiar pe conturul cercului director), este suficient să se raporteze lungimile ***B II, C III,...,H VIII*** de pe desfăşurată, pe proiecțiile verticale ale generatoarelor respective în ***b'2', c'3',..., h'8'*** şi să se unească punctele obținute între ele, în ordinea numerică, printr-o curbă continuă.

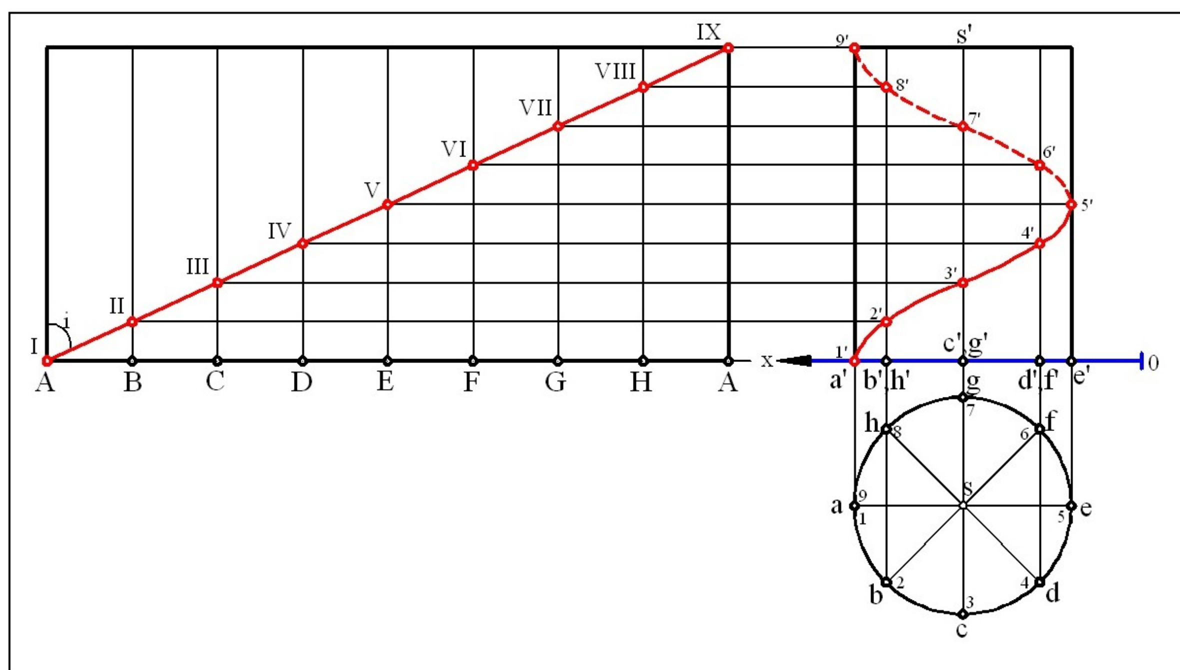


Fig.6.22.Desfăşurata cilindrului.

6.6. Aplicații

1) Să se reprezinte în epură un con circular drept cu baza aşezată într-un plan paralel cu linia pământului.
Rezolvare:

Fie ***Ph, Pv, Pl*** (figura 6.23) planul paralel cu ***Ox*** în care se găseşte cercul director al conului şi ***c,c',c"*** centrul acestui cerc. Întrucât înălțimea conului este perpendiculară pe planul ***Ph,Pv***, implicit şi proiecția ei laterală ***s"c"*** va fi perpendiculară pe urma ***Pl*** a planului bazei. Cercul director al conului se va proiecta pe planul ***L*** în ***b_1"b_2"*** pe urma ***Pl*** (***b_1"b_2"*** reprezintă adevărata mărime a diametrului cercului). Unind pe ***s"*** cu ***b_1"*** şi ***b_2''***, se obțin cele două generatoare de contur aparent lateral ale conului.

Cu ajutorul proiecției conului pe planul ***L***, se construiesc acum şi proiecțiile pe planele ***H*** şi ***V***: se găsesc în ***s*** şi ***s'*** proiecțiile vârfului conului, iar în ***b_1b_2, b_1'b_2'*** axele mici ale celor două elipse după care se proiectează pe planele ***H*** şi ***V*** cercul director al conului. Axele mari ale elipselor, ***a_1a_2*** şi ***a_1'a_2'***, se duc prin ***c*** respectiv ***c'***, perpendiculare pe axele mici şi de lungimi egale cu diametrul cercului director. După ce s-au trasat cele două elipse-proiecție cu ajutorul axelor, se duc tangentele corespunzătoare din ***s*** respectiv ***s'*** şi se obțin astfel proiecțiile cerute ale suprafeței.

2) Să se determine punctele în care o dreaptă de nivel intersectează un cilindru circular oblic.
Rezolvare:

Fie ***d, d'*** (figura 6.24) dreapta de nivel dată şi cilindrul circular oblic de axă ***cc_1, $c'c_1'$*** cu cercul de bază de centru ***c,c'*** în planul ***H***. Pentru a obține punctele în care dreapta ***d,d'*** intersectează cilindrul este avantajos să se utilizeze drept plan auxiliar, un plan de nivel ***Pv*** care trece prin dreaptă. Planul ***Pv*** va intersecta cilindrul după un cerc cu centrul în ***g-g'*** şi de rază egală cu raza cercului director al cilindrului. Proiecțiile orizontale ***m*** şi ***n*** ale punctelor de intersecție căutate se găsesc la intersecția lui ***d*** cu cercul de centru ***g***. Cu ajutorul liniilor de ordine corespunzătoare se obțin apoi pe ***d'***, proiecțiile verticale ***m'*** şi ***n'*** ale celor două puncte.

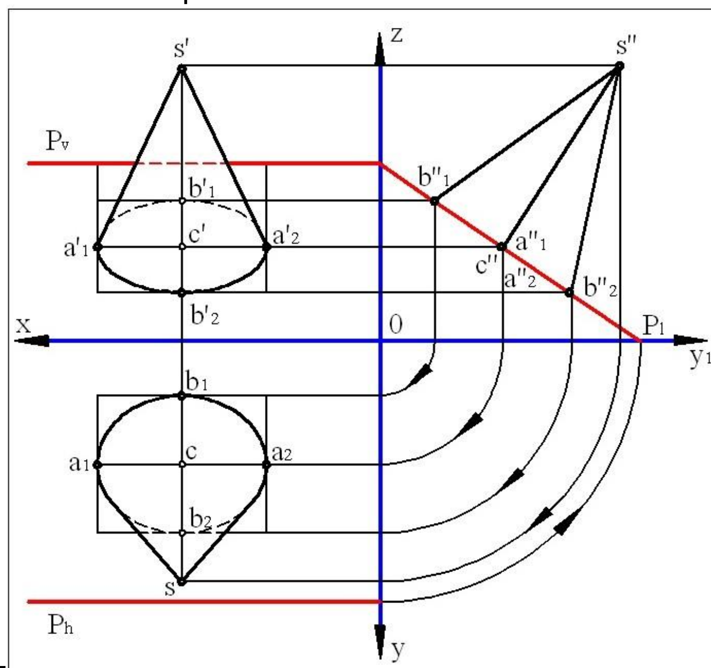


Fig.6.23. Aplicația 1.

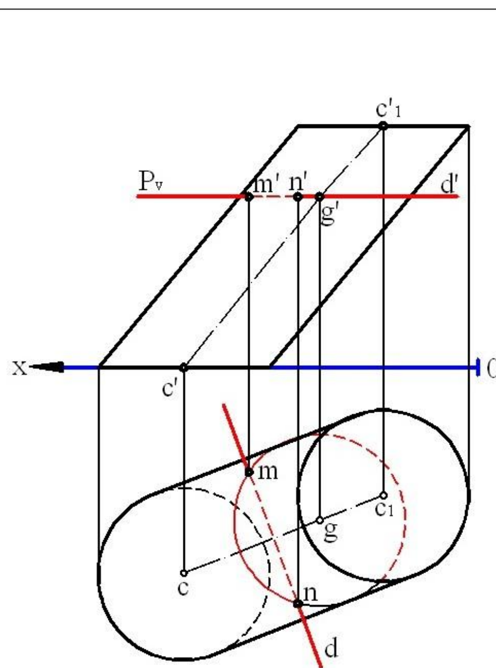


Fig.6.24.Aplicatia 2.

3) Să se ducă un plan tangent la un con circular oblic, printr-un punct exterior suprafeței.

Rezolvare:

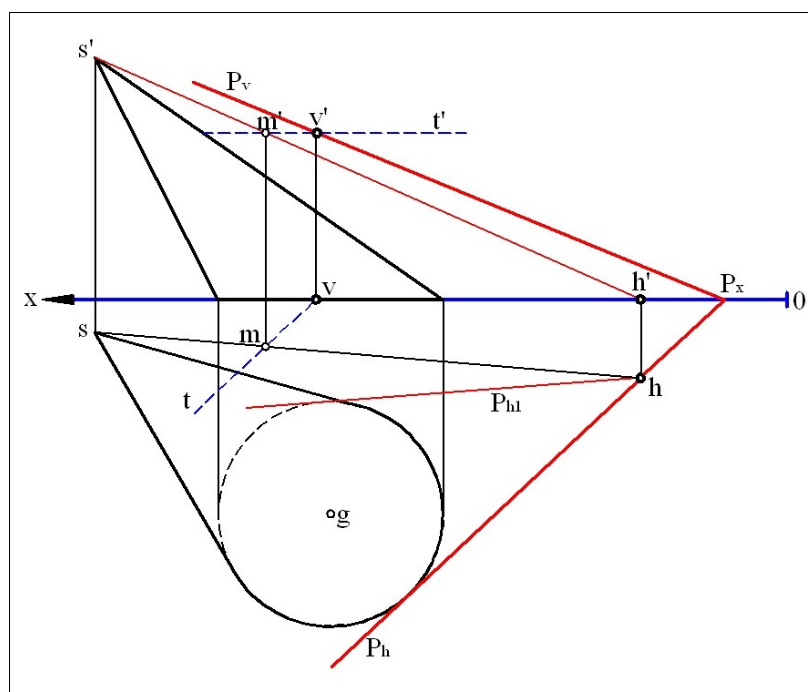


Fig.6.25. Aplicația 3.

Fie ***m,m'*** (figura 6.25) punctul dat şi ***s,s'*** vârful conului circular oblic având cercul director cu centrul în ***g***, situat în planul ***H***. Planul tangent la con fiind tangent la suprafaţă în lungul unei generatoare, va conţine dreapta ***sm, s'm'*** care uneşte cele două puncte. Urma orizontală ***Ph*** a planului va trebui să treacă atunci prin urma ***h,h'*** a dreptei ***sm, s'm'*** şi să fie tangentă la cercul director al conului.

Pentru determinarea urmei ***Pv*** este necesar un singur punct, întrucât ***Px*** se găseşte la intersecţia lui ***Ph*** cu ***Ox***. Acest punct se obţine ducând, prin punctul ***m,m'***, o orizontală ***t,t'*** a planului tangent şi căutând urma verticală ***v,v'*** a acesteia. Unind pe ***v'*** cu ***Px***, se obţine urma căutată ***Pv***.

Problema are două soluţii, întrucât dintr-un punct exterior se pot duce două plane tangente la un con. În epură, din punctul ***h*** se poate duce, pe lângă tangenta ***Ph***, o a doua tangentă Ph_1 la cercul director, urma orizontală a celui de-al doilea plan tangent la con.

4) Să se desfăşoare suprafaţa laterală a unui cot cilindric format din două burlane perpendiculare, racordate între ele cu un al treilea, aşezat la 45° faţă de primele două. Cele trei burlane sunt de acelaşi diametru şi au axele coplanare.
Rezolvare:

Aşezând cotul cu generatoarele paralele cu planul ***V,*** ansamblul se va proiecta ca în figura 6.26,a. Curbele de intersecţie ale celor trei cilindri sunt două elipse egale, care se proiectează vertical după segmentele ***a'g'*** şi $a_1'g_1'$.

Pentru a putea construi desfăşuratele s-au dus întâi pe cei trei cilindri generatoarele prin punctele care împart cercul director al suprafeţelor în 12 arce egale (în epură diviziunea s-a făcut pe cercul de urmă orizontală a cilindrului ***1***).

Pentru a desfăşura trunchiul de cilindru ***(1),*** pe o dreapta oarecare ***I-I*** (figura 6.26, b) s-au raportat lungimile arcelor egale între ele: ***1-2, 2-3, 3-4,*** etc. Din punctele ***I, II, III*** etc., astfel obţinute, s-au purtat pe perpendicularele duse la dreapta ***I-I,*** lungimile generatoarelor suprafeţei, măsurate pe proiecţiile verticale respective, unde apar în adevărată mărime în ***1'a'=IA***, ***2'b' =IIB,*** etc. Unind extremităţile ***A, B, C,*** etc, cu o linie continuă, s-a obţinut curba care limitează desfăşurata la partea inferioară.

Pentru a putea desfăşura trunchiul de cilindru ***(2)*** se duce întâi un plan de capăt ***Ph, Pv*** perpendicular pe generatoarele cilindrului (***Pv*** perpendicular pe ***j'k'***). Cercul obţinut prin secţionarea cu ***Ph Pv*** se desfăşoară apoi pe dreapta G_0G_0 împreună cu arcele în care a fost împărţit (este acelaşi cu cercul director al cilindrului ***1***). Pe perpendicularele duse prin G_0, F_0, E_0 etc, se raportează, deasupra şi dedesubtul lui G_0G_0, lungimile generatoarelor suprafeţei care apar în adevărată mărime pe planul ***V***: $G_0G = g_o'g'$, $F_oF=f_0'f'$ etc. Unind punctele ***G,F,E,...,E,F,G*** astfel aflate, se obţin cele două curbe care mărginesc desfăşurata.

Desfăşurata trunchiului de cilindru ***(3)*** este identică cu aceea construită pentru ***(1).***

Se atrage atenţia asupra faptului că cilindrul ***(1)*** a fost desfăşurat presupunând că este tăiat după generatoarea ***1A,*** în timp ce pentru cilindrul ***(2)*** tăietura s-a făcut după generatoarea opusă ***GG***. S-a procedat astfel intenţionat, pentru ca să rezulte pe desfăşurate că cele două curbe de intersecţie desfăşurate ***(ABC... CBA*** şi ***GFE...EFG)*** sunt paralele între ele. Acest lucru este important în practică, întrucât se vede că cele trei burlane pot fi tăiate dintr-o singură bucată de tablă dreptunghiulară, având lungimea $2 \pi r$ şi înălţimea ***(t+s+t),*** deci se poate realiza astfel şi în acest caz o economie de material.

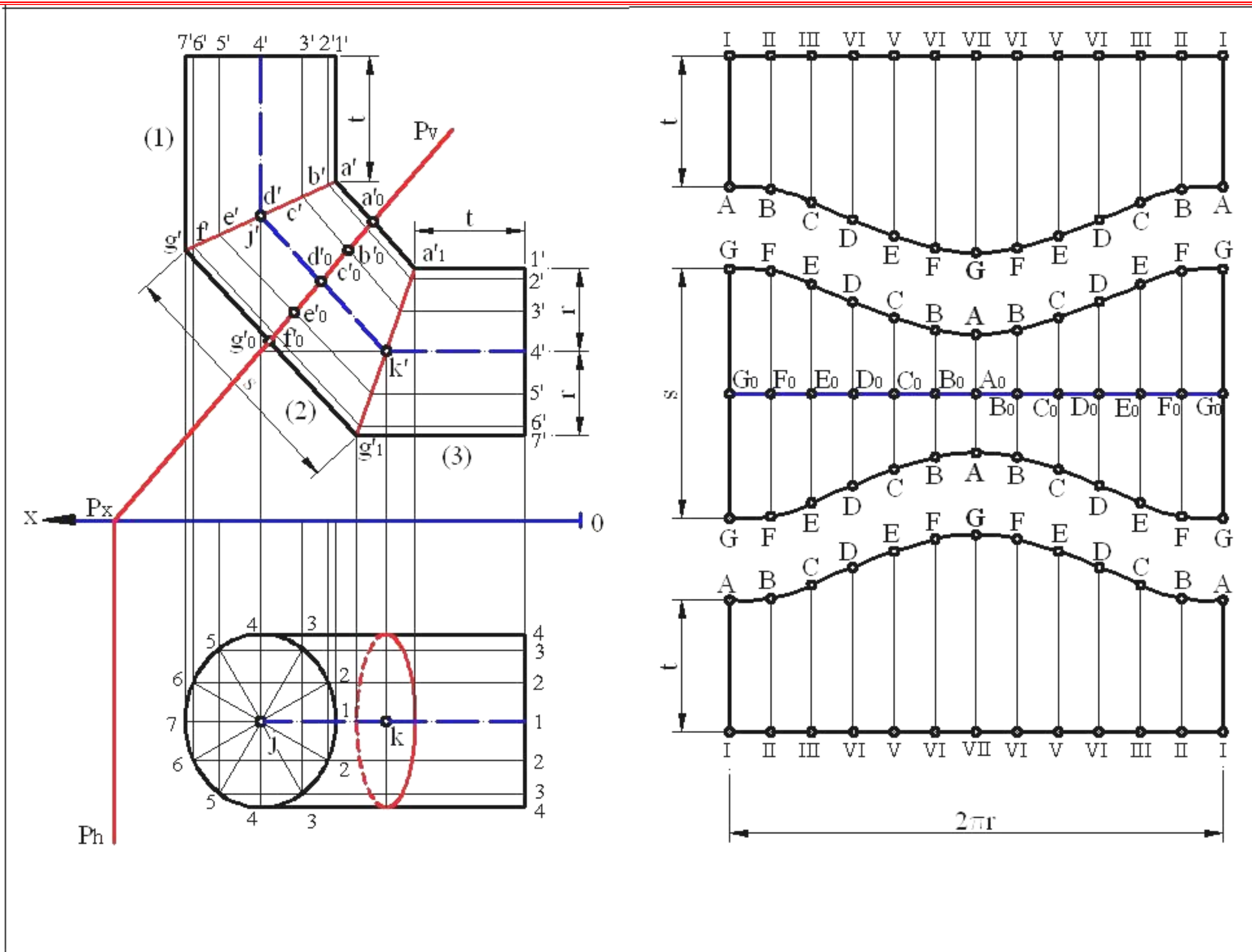


Fig. 6.26.a.b. Aplicația 4.

7. INTERSECȚII DE CORPURI

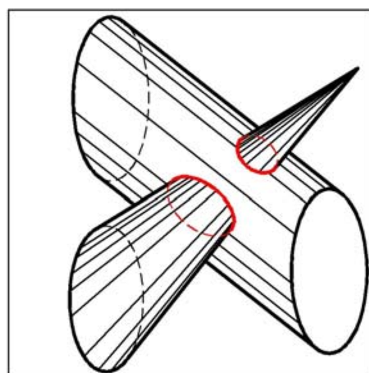
7.1. Clasificări. Metoda planelor auxiliare.

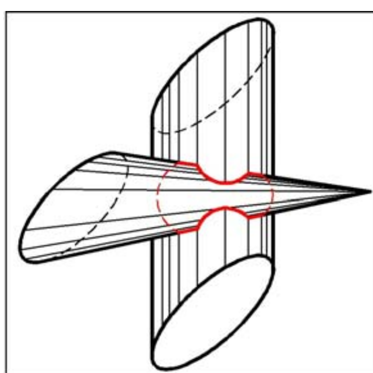
Intersecțiile de corpuri se pot clasifica în două categorii: pătrunderi şi smulgeri.

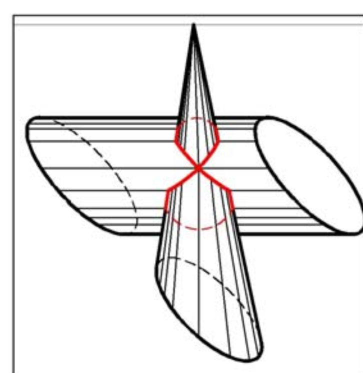
Când unul din corpuri (figura 7.1) pătrunde complet în celălalt (conul pătrunde în cilindru), toate generatoarele primei suprafețe intersectează pe cea de-a doua: intersecția astfel obținută se numeşte **pătrundere** şi este caracterizată printr-o curbă cu două ramuri, una de intrare şi cealaltă de ieşire.

Dacă oricare dintre corpuri pătrunde parțial în celălalt (figura 7.2), fiecare suprafață va rămâne cu un număr oarecare de generatoare care nu intersectează cealaltă suprafață: intersecția astfel obținută se numeşte **smulgere** sau **rupere** şi are specific o curbă cu o singură ramură.

Când curba de intrare (figura 7.3) şi cea de ieşire au un punct comun, prin care se poate duce un plan tangent în acelaşi timp la ambele corpuri, se obține un caz intermediar de intersecție, între pătrundere şi smulgere.


Fig. 7.1.Pătrundere


Fig.7.2.Smulgere


Fig.7.3.Cu plan tangent.

Pentru determinarea liniei după care se intersectează cele două suprafețe se recurge la nişte suprafețe auxiliare, cu care se intersectează corpurile date.

Fie C_1 şi C_2 (figura 7.4) curbele după care o suprafață auxiliară oarecare ***P*** secționează cele două suprafețe care se intersectează. Punctele ***M*** şi ***N*** comune celor doua curbe C_1 şi C_2, vor fi puncte de pe curba de intersecție căutată, pentru că se găsesc pe cele două suprafețe care se intersectează. Repetând operația şi cu alte plane auxiliare, se obține un număr suficient de puncte pentru a putea trasa curba de intersecție căutată.

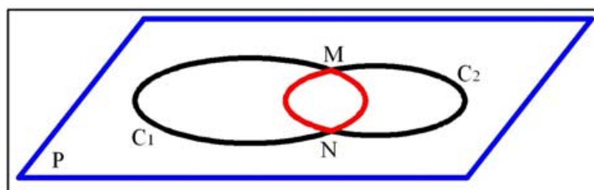


Fig. 7.4. Curba de intersecție MN.

Pentru simplificarea construcțiilor grafice în epură, suprafețele auxiliare trebuie astfel alese, încât liniile de intersecție care rezultă să fie cât mai simplu de trasat, dacă se poate, drepte sau cercuri paralele cu unul din planele de proiecție. În general, se utilizează planul ca suprafață auxiliară.

Pentru intersecțiile de suprafețe riglate, planele auxiliare se pot lua astfel, încât să taie ambele suprafețe după generatoare; se evită deci complet trasările de curbe care conduc de cele mai multe ori la construcții grafice laborioase.

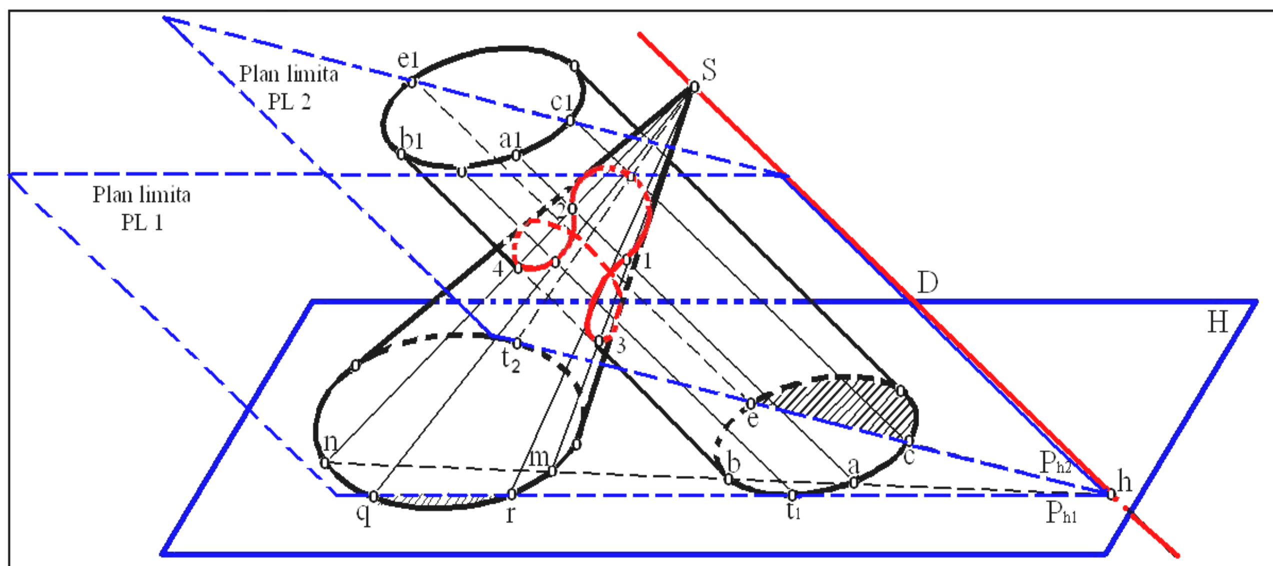


Fig. 7.5. Plane limită la con şi cilindru.

Astfel, pentru a determina curba după care se intersectează un con oblic cu un cilindru oblic oarecare (figura 7.5), planele auxiliare se vor duce astfel, încât să secționeze ambele suprafețe în lungul lor, deci să le intersecteze după câte două generatoare. Pentru aceasta, fiecare plan auxiliar va trebui să treacă prin vârful conului şi să fie paralel cu generatoarele cilindrului, deci să treacă printr-o dreaptă ***D*** dusă prin vârful conului paralel cu generatoarele cilindrului. Rezultă că, în epură, urmele orizontale ale planelor auxiliare vor trebui să treacă prin urma orizontală ***h*** a dreptei ***D***.

Fie ***P*** un asemenea plan auxiliar; urma ***Ph*** dusă prin ***h*** intersectează cercurile directoare ale celor două suprafețe în punctele ***a*** şi ***b***, respectiv ***m*** şi ***n***. Generatoarele corespunzătoare, aa_1 şi bb_1 respectiv ***ms*** şi ***ns***, reprezintă liniile după care planul auxiliar ***P*** intersectează cele două suprafețe. Ele se intersectează două câte două în punctele ***1, 2, 3*** şi ***4*** care se găsesc pe curba de intersecție căutată. Cu ajutorul unui al doilea plan auxiliar trecând tot prin ***D*** se vor obține în mod analog, alte patru puncte ale curbei şi aşa mai departe, până când se găsesc suficiente puncte pentru a putea trasa curba.

Este evident că nu orice plan ***P*** care trece prin dreapta ***D*** secționează conul şi cilindrul, deci nu orice plan este util pentru determinarea intersecției. Astfel, urmărind figura 7.5, se constată că planele utile pentru intersecție trebuie luate între planul de urmă Ph_1 şi cel de urmă Ph_2, primul tangent după generatoarea t_1, la cilindru, cel de-al doilea tangent după generatoarea t_2 la con. Într-adevăr, orice plan a cărui urmă orizontală este în afara lui Ph_1 - în zona haşurată a bazei conului - va tăia numai conul, după cum orice plan cu urma orizontală în afara lui Ph_2 - în zona haşurată a bazei cilindrului - va tăia numai cilindrul. Planele ale căror urme orizontale nu taie nici urma orizontală a conului, nici a cilindrului, nu intersectează nici una din suprafețe.

Cele două plane în poziții extreme *PL1* şi *PL 2* se numesc plane limită.

Din studierea urmelor suprafețelor şi a planelor limită se mai pot trage concluzii şi în privința stabilirii naturii intersecției. Astfel, în exemplul din figura 7.5 se vede că atât conul cât şi cilindrul au generatoare care pornesc din zonele haşurate care nu intersectează cealaltă suprafață, proprietate care caracterizează **smulgerea.** Pentru a fi în prezența unei **pătrunderi,** urmele suprafețelor trebuie să fie față de cele ale planelor limită, fie în poziția din figura 7.6.a, când conul pătrunde în cilindru, fie în aceea din figura 7.6.b, când cilindrul pătrunde în con. Caracteristica pătrunderii apare în ambele cazuri: una din suprafețe (cea fără zone haşurate) are toate generatoarele intersectate de cealaltă.

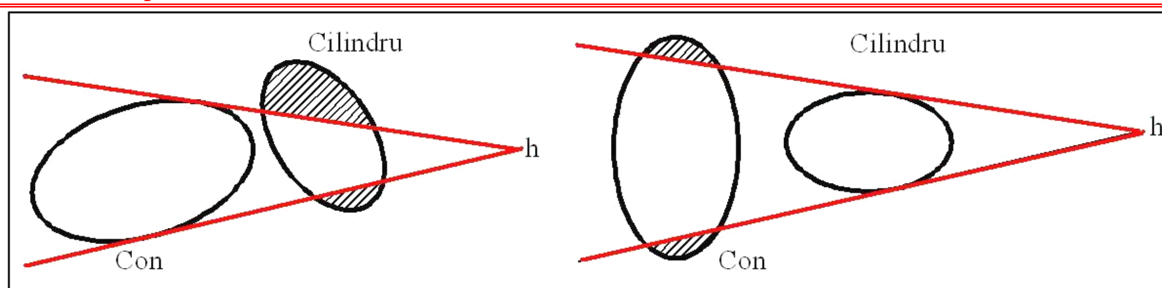


Fig. 7.6.a.b. Pătrunderi în cilindru respectiv în con.

Concluzie: *dacă fiecare plan limită secționează câte una din suprafețe, este vorba de o smulgere; dacă ambele plane limită secționează aceeaşi suprafață, este vorba de o pătrundere.*

7.2. Intersecții de poliedre

Două poliedre se intersectează după unul sau două poligoane (smulgere respectiv pătrundere) ale căror vârfuri rezultă la intersecția muchiilor unuia din poliedre cu fețele celuilalt şi invers, şi ale căror laturi sunt segmentele de dreaptă după care se intersectează fețele celor două corpuri.

Deoarece pentru determinarea poligonului de intersecție este suficient să se cunoască vârfurile lui, metoda planelor auxiliare arătată mai sus se va aplica şi la intersecția poliedrelor. În acest caz este suficient să se ducă planele de secțiune longitudinală doar prin muchiile celor două poliedre.

În cele ce urmează se va arăta, pe un exemplu concret, ordinea operațiilor grafice în epură.

Fie prisma ***abc*** $a_1b_1c_1$, ***a'b'c'*** $a_1'b_1'c_1'$ (figura 7.7) care se intersectează cu piramida ***mnrs, m'n'r's',*** ambele cu baze triunghiuri aşezate în planul ***H***.

Prin vârful ***s,s'*** al piramidei se duce dreapta ***sh, s'h'*** paralelă cu muchiile prismei. Toate planele auxiliare care trec prin ***sh, s'h'*** vor tăia cele două suprafețe după generatoare. Determinarea vârfurilor poligonului de intersecție se face întâi în proiecția orizontală.

Se duc prin ***h*** urmele celor două plane limită, ***hn*** respectiv ***ha***; rezultă zona inutilă (haşurată în epură) ***dbe*** în prismă şi ***urv*** în piramidă; suntem deci în prezența unei smulgeri; muchia BB_1 a prismei nu întâlneşte piramida, iar muchia ***RS*** a piramidei nu întâlneşte prisma.

Pentru a avea duse plane auxiliare prin toate muchiile aflate în zona utilă, se mai duc înafara celor două plane limită, planul de urmă ***hm*** prin muchia ***sm, s'm'*** şi planul de urmă ***hc*** prin muchia cc_1, $c'c_1'$.

Cele patru plane auxiliare determină cele opt vârfuri ale poligonului de intersecție. Într-adevăr, în proiecția orizontală, planul ***hn*** intersectează prisma după generatoarele din ***d*** şi ***e*** (paralele cu muchiile prismei) şi piramida după muchia ***sn***.

La intersecția lor se obțin punctele ***3*** respectiv ***6*** în care muchia ***sn*** a piramidei intersectează prisma. În mod analog, cu ajutorul planului ***hm*** se obțin generatoarele din ***f*** şi ***g*** care se intersectează cu muchia ***ms*** în punctele ***2*** respectiv ***7***. Însfârşit, cu ***hc*** se obțin ***qs*** şi ***ts*** care se intersectează cu cc_1 în ***8*** respect în ***5***, iar cu ***ha*** se obțin ***us*** şi ***vs*** care dau cu aa_1 pe ***1*** respectiv ***4***.

Ordinea în care trebuie unite punctele astfel aflate pentru a obține proiecția orizontală a poligonului de intersecție nu poate fi stabilită decât rareori prin simpla observare a celor două suprafețe. De aceea este indicat a se folosi aşa-numita **metodă a mobilului,** care stabileşte o anumită ordine în succesiunea operațiilor.

Conform acestei metode, planele auxiliare utilizate sunt privite ca diversele poziții ocupate de un acelaşi plan mobil care se roteşte în jurul dreptei ***sh, s'h'***. Fiecărei poziții a acestui plan îi corespunde o generatoare pe prismă şi una pe piramidă, iar la intersecția lor, un punct de pe poligonul de intersecție.

Când planul se roteşte într-un anumit sens, urmele orizontale ale celor două generatoare se mişcă pe urmele celor două poliedre în acelaşi sens, iar punctul de intersecție al generatoarelor descriu în spațiu poligonul de intersecție în sensul în care trebuie unite între ele punctele obținute.

În epura 7.7, succesiunea operațiilor este indicată prin săgeți pe cele două urme ale suprafețelor (în epură reproduse separat în acest scop), iar rezultatele obținute sunt trecute într-un tabel (***Tabelul 7.1.)*** în care se înscriu**:** pe primul rând, urmele generatoarelor de pe baza prismei; pe al doilea, urmele generatoarelor corespunzătoare de pe baza piramidei, iar pe al treilea, punctele de intersecție respective de pe poligonul din spațiu.

Deplasarea planului mobil se face pornind de la o poziție oarecare, spre exemplu, ***a*** de pe prismă, ***u*** de pe piramidă, şi se face într-un anumit sens, cel indicat de săgeți. Poziției inițiale a planului îi corespund deci generatoarele care pornesc din ***a*** de pe prismă şi din ***u*** de pe piramidă; ele se întâlnesc în punctul notat cu ***1*** în tabel, corespunzător unui vârf al poligonului de intersecție.

Mişcând planul mobil în sensul arătat de săgeți, se ajunge la generatoarele ***f*** pe prismă, ***m*** pe piramidă şi punctul de intersecție ***2***, iar în poziția următoare, în ***d, n*** şi punctul ***3.*** Ajuns în poziția limită, planul mobil se întoarce înapoi; pe prismă de la generatoarea din ***d*** se ajunge la cea din ***a,*** iar pe piramidă de la cea din ***n*** se trece la cea din ***v,*** la intersecția lor se obține punctul ***4.*** Ajuns din nou într-o poziție limită, planul mobil se întoarce; pe prismă se ajunge de la ***a*** la ***c***, iar pe piramidă de la ***v*** la ***t*** , în tabelă se înscrie punctul corespunzător ***5.*** Urmând în continuare drumul arătat de săgeți, se obțin succesiv: ***e-n-6, g-m-7, c-q-8*** şi, în sfârşit, prin ***a-u-1*** se ajunge de unde s-a plecat.

Unind acum proiecțiile vârfurilor poligonului de intersecție din epură în ordinea arătată de numerele din tabel, se obțin şi proiecțiile orizontale ale laturilor poligonului.

Proiecțiile verticale ale vârfurilor poligonului de intersecție rezultă la intersecția liniilor de ordine duse din proiecțiile orizontale ale acestora, cu proiecțiile verticale ale muchiilor corespunzătoare. Laturile poligonului se obțin unind vârfurile în aceeaşi ordine cu a numerelor din tabel.

Pentru a stabili laturile văzute şi nevăzute ale poligonului în fiecare din cele două proiecții se caută vizibilitatea în proiecția respectivă a fețelor care au dat naştere prin intersecția lor la latura corespunzătoare a poligonului. Se ştie că un segment poate fi văzut numai dacă provine din intersecția a două fețe văzute. Cercetarea vizibilității se poate face direct în tabela întocmită pentru mişcarea planului mobil. Din tabelă se deduce că latura ***1-2***, spre exemplu, rezultă din intersecția feței ***af*** a prismei, cu fața ***um*** a piramidei. În ce priveşte proiecția orizontală, întrucât ***a-f*** este văzută şi ***u-m*** este văzută, rezultă că latura ***1-2*** este vizibilă.

Un raționament similar conduce la stabilirea vizibilității poligonului de intersecție în proiecția verticală. Se poate utiliza acelaşi tabel pe care se marchează porțiunile nevăzute în proiecția verticală cu liniuțe de culoare diferită sau un semn oarecare ***(v)*** diferit, de primul. Rezultă că numai latura ***1'-8'*** a poligonului este văzută.

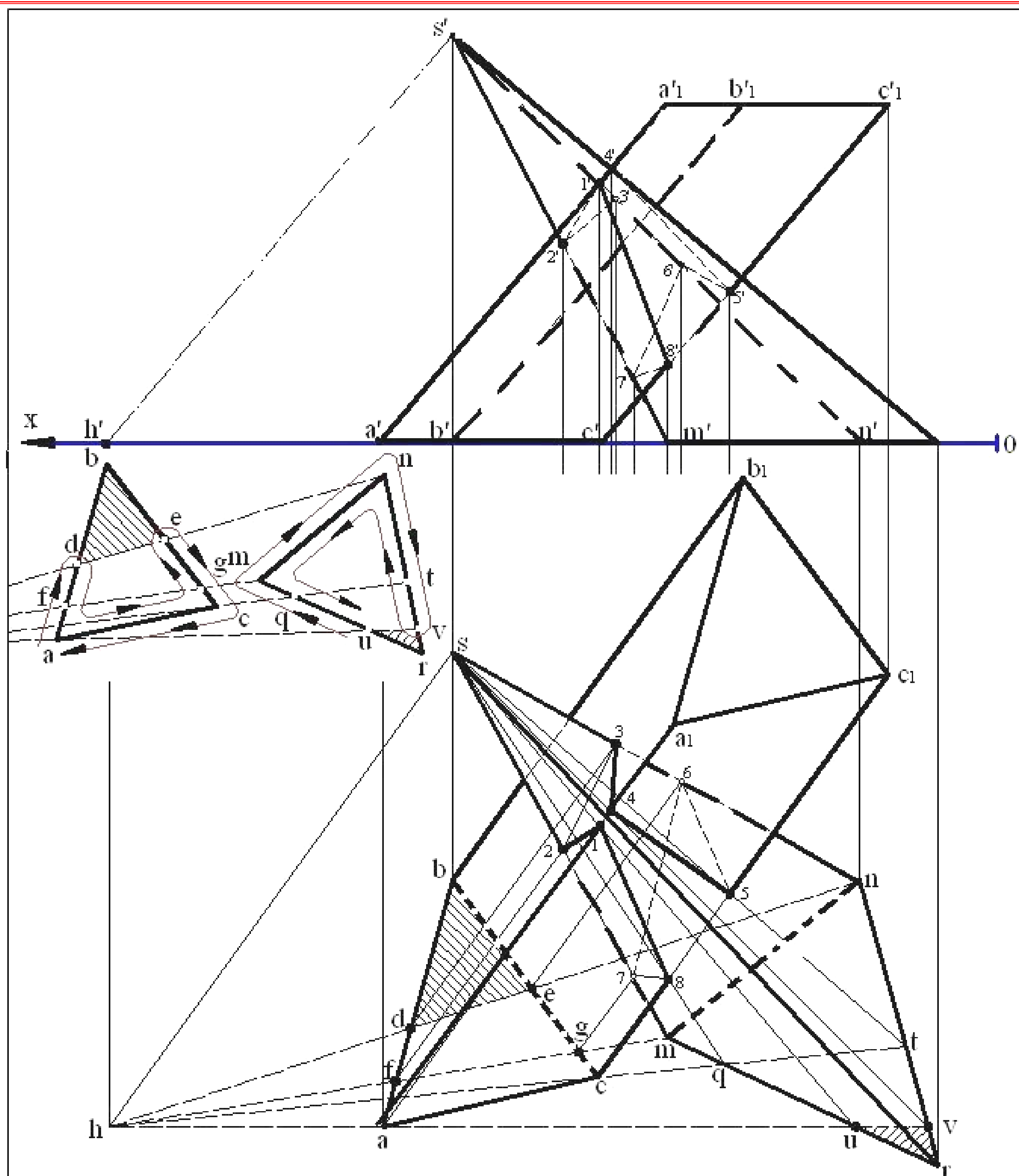


Fig.7.7.

Tabelul 7.1.:

a	f	d	a	c	e	g	c	a
u	m	n	v	t	n	m	q	u
1	2	3	4	5	6	7	8	1

[H]-
[V]v

Dacă se notează de la început în tabel, spre exemplu cu liniuțe, fețele nevăzute ale prismei ***(c-e-g-c)*** şi ale piramidei (***m-n* şi *n-m***) în proiecția orizontală, rezultă prin combinarea lor laturile nevăzute ale poligonului de intersecție (***2-3, 5-6, 6-7 şi 7-8***).

Vizibilitatea muchiilor celor două poliedre se cercetează, în funcție de vizibilitatea vârfurilor poligonului de intersecție. Astfel, în proiecția orizontală, muchia ***aa_1*** a prismei este văzută din *a* până în ***1*** şi din ***4*** până în ***a_1*,** deoarece atât vârful ***1*** cât şi ***4*** sunt văzute. Muchia ***sn*** a piramidei este văzută din ***s*** până în ***3*** - punct vizibil - şi nevăzută din ***6*** până în dreptul muchiei ***cc_1*,** deoarece vârful ***6*** este invizibil.

Cercetând astfel pe rând toate muchiile în cele două proiecții, se completează epura cu toate liniile trasate conform convențiilor stabilite.

Pentru determinarea poligoanelor de intersecție a două piramide sau a două prisme se procedează în mod analog cu singura diferență că:

- în cazul intersecției a două piramide (figura 7.8) planele auxiliare se vor duce prin dreapta ***s_1s_2 $s_1's_2'$*** care uneşte vârfurile celor două poliedre;
- în cazul intersecției a două prisme (figura 7.9), planele auxiliare vor trebui să fie paralele cu generatoarele ambelor prisme.

Pentru aceasta, printr-un punct exterior ***m, m'*** se duce o dreaptă ***mh_1 $m'h_1'$*** paralelă cu generatoarele uneia din prisme, şi alta ***mh_2, $m'h_2'$***, paralelă cu generatoarele celeilalte. Cele două drepte concurente în ***m, m'*** vor determina planul cu care vor trebui să fie paralele toate planele auxiliare pentru ca să intersecteze ambele poliedre după generatoare.

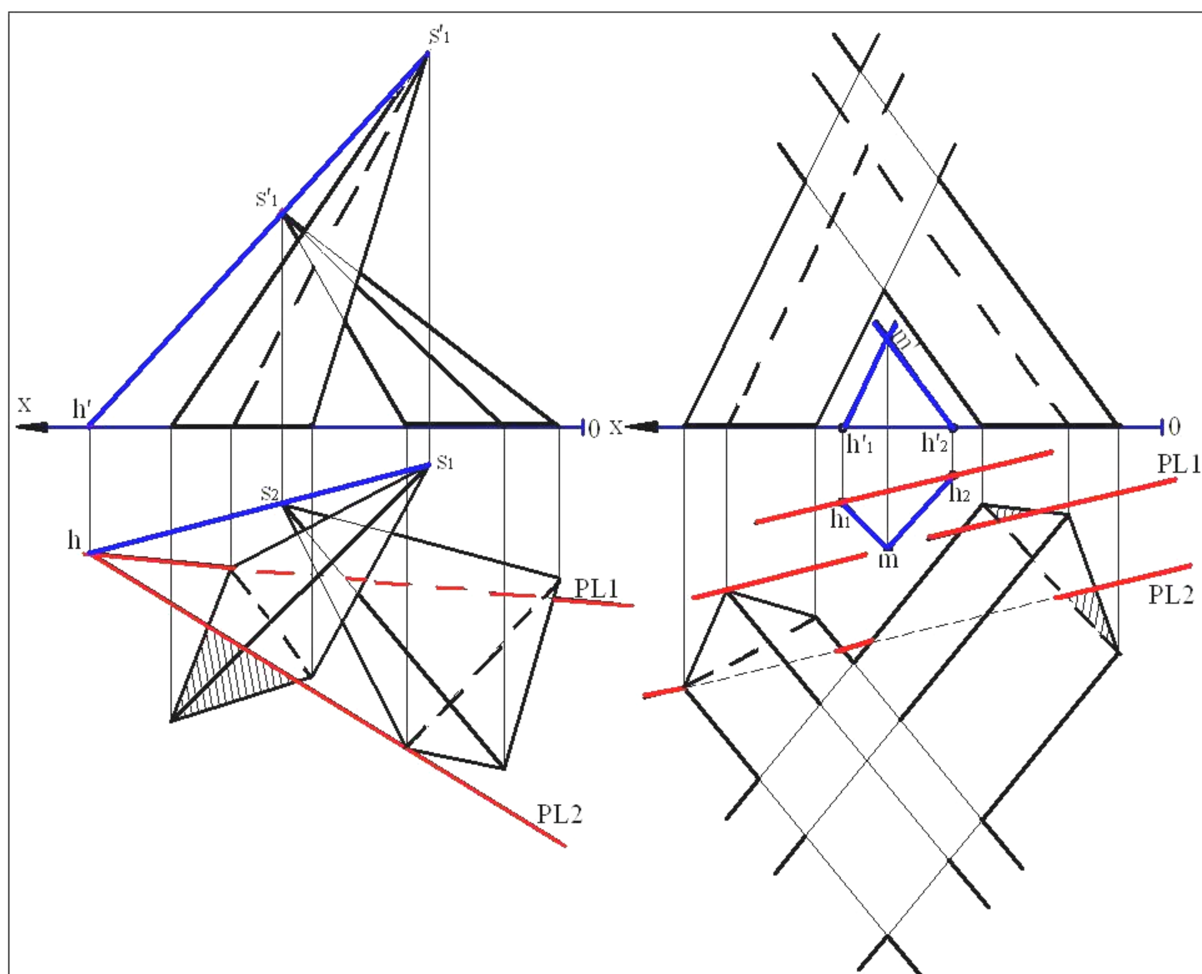


Fig. 7.8. Plane limită la două piramide. *Fig. 7.9.Plane limită la două prisme.*

7.3. Intersecții de suprafețe cilindro-conice

În continuare se va arăta modul cum se aplică metoda planelor auxiliare la determinarea curbei de intersecție a două suprafețe cilindrice.

Fie două suprafețe cilindrice, având curbele directoare K_1 şi K_2 situate în planul ***H*** (figura 7.10). Pentru a putea duce planele auxiliare care să secționeze ambele suprafețe după generatoare se duc întâi (vezi şi figura 7.9), printr-un punct oarecare ***m, m'***, o dreaptă mh_1, $m'h_1'$ paralelă cu generatoarele cilindrului K_1 şi una mh_2, $m'h_2'$ paralelă, cu generatoarele cilindrului K_2.

Cele două drepte concurente determină planul de urmă orizontală ***Ph*** (obținută unind pe h_1 cu h_2), paralel cu generatoarele ambelor suprafețe. Planele auxiliare vor trebui duse paralele cu planul ***P***; deci urmele lor orizontale vor fi paralele cu ***Ph***.

Cele două plane limită de urme Ph_1 şi Ph_2 arată că cilindrul k_2 pătrunde complet în cilindru k_1 (Ph_1 **şi** Ph_2 intersectează numai curba K_1). Rezultă deci o curbă de intersecție cu două ramuri: una de intrare şi cealaltă de ieşire.

Pentru determinarea intersecției în proiecție orizontală se duc întâi după metoda cunoscută, urmele planelor auxiliare Ph_a **...** Ph_l paralele cu ***Ph***, în zona cuprinsă între Ph_1 şi Ph_2. Apoi cu ajutorul punctelor în care acestea intersectează directoarele k_1 şi k_2, notate în epură cu litera corespunzătoare planului secant (de exemplu, lui Ph_e îi corespund e_1 şi e_3 pe k_1 şi e_2 cu e_4 pe k_2), se trasează generatoarele de secțiune din intersecțiile cărora rezultă punctele de pe curba căutată.

Între planele auxiliare cu care se secționează cele două suprafețe este bine să se ducă mai ales cele care trec prin generatoarele remarcabile ale acestora (generatoarele de contur aparent orizontal şi vertical, cele determinate de planele limită), întrucât ele conduc la puncte în care curba este tangentă la aceste generatoare.

Astfel, planul Ph_c dus prin generatoarea de contur aparent orizontal c_3 a cilindrului k_1 conduce la punctele ***23*** şi ***34*** în care curba de intrare este tangentă la generatoarea c_3; planul limită Ph_2 conduce la punctele ***9*** şi ***29*** în care curbele de ieşire respectiv de intrare sunt tangente la generatoarele din l_1 respectiv l_3.

În tabelul 7.2. sunt trecute, numerotate în ordinea în care trebuie unite, punctele de pe curba de intrare ***(2)*** şi curba de ieşire ***(1)*** ce corespund pe coloana respectivă urmelor generatoarelor la intersecția cărora se găsesc.

Tabelul a fost alcătuit conform metodei mobilului. În timp ce planul mobil ***Ph*** s-a deplasat prin translație, succesiv, din poziția Ph_a în poziția Ph_l şi înapoi, urmele generatoarelor de secțiune corespunzătoare s-au deplasat pe directoarea k_1 de la a_1 până la l_1 şi înapoi pentru curba de ieşire şi de la a_3 până la l_3 şi înapoi pentru cea de intrare, în timp ce urmele de pe directoarea k_2 executau un tur complet al acesteia: $a_2, b_2, c_2, \ldots c_4, b_4, a_2$.

Tabel 7.2.

	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1	i_1	j_1	l_1	j_1	i_1	g_1	e_1	c_1	b_1	a_1
(1)	a_2	b_2	c_2	d_2	e_2	f_2	i_2	j_2	l_2	j_4	i_4	g_4	e_4	c_4	b_4	a_2
	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***	***1***
	a_3	b_3	c_3	d_3	e_3	f_3	i_3	j_3	l_3	j_3	i_3	g_3	e_3	c_3	b_3	a_3
(2)	a_2	b_2	c_2	d_2	e_2	f_2	i_2	j_2	l_2	j_4	i_4	g_4	e_4	c_4	b_4	a_2
	21	***22***	***23***	***24***	***25***	***26***	***27***	***28***	***29***	***30***	***31***	***32***	***33***	***34***	***35***	***21***

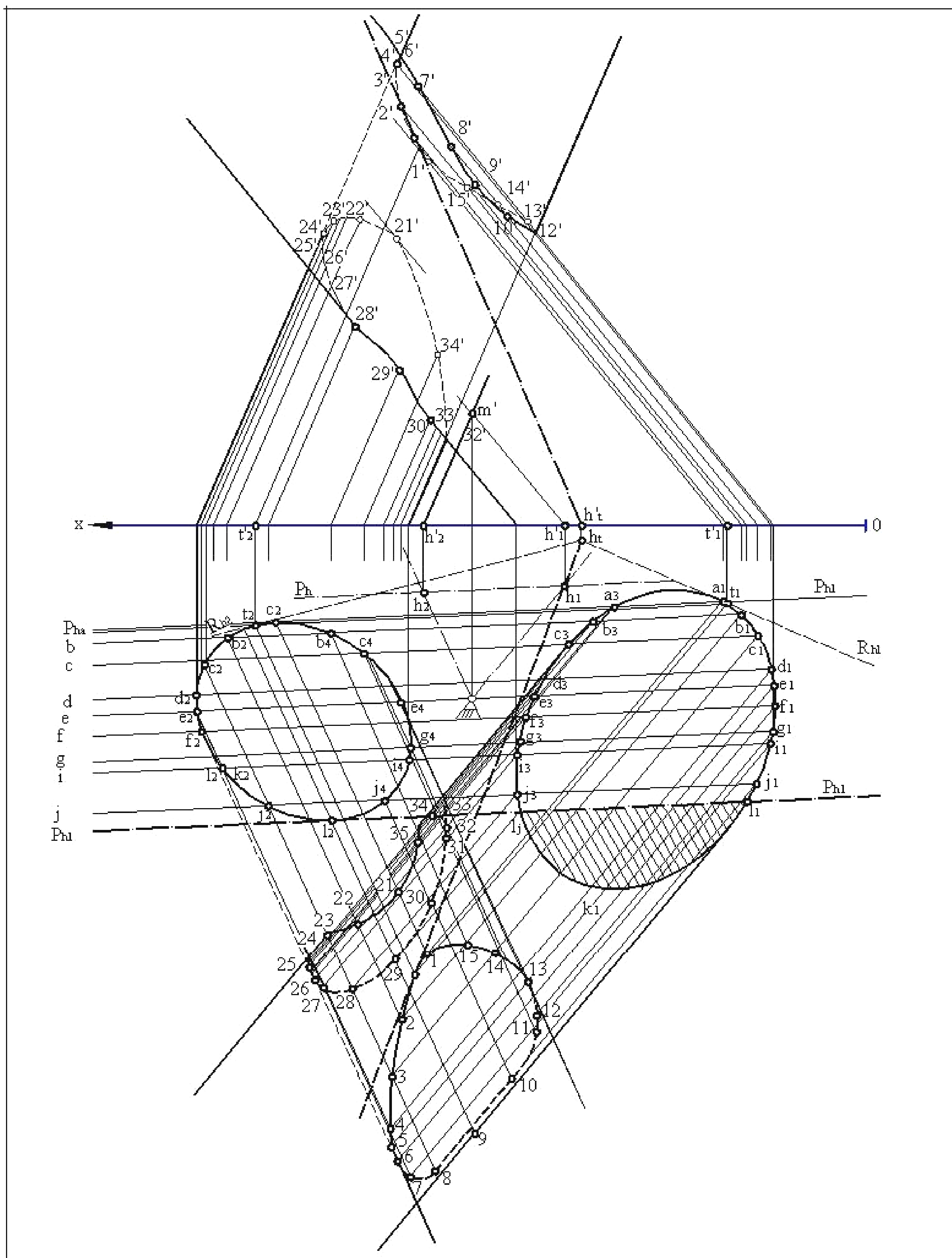


Fig.7.10. Intersecția a doi cilindri.

După ce s-au determinat proiecțiile orizontale ale punctelor aparținând curbelor de intersecție, se obțin şi proiecțiile verticale ale acestora intersectând liniile de ordine cu proiecțiile verticale ale generatoarelor duse prin punctele respective.

Pentru trasarea porțiunilor văzute şi nevăzute ale curbelor în cele două proiecții se ține seama că acestea se pot schimba din văzute în nevăzute şi invers, numai în punctele de pe generatoarele de contur aparent. Astfel, pentru a spune despre curba de intrare că este văzută în porțiunea cuprinsă între punctele ***23*** şi ***34*** de pe generatoarea de contur aparent orizontal din c_3 este suficient să se arate, spre exemplu, că punctul ***21*** (un punct oarecare între ***23*** şi ***34***) este văzut deoarece se găseşte la intersecția generatoarelor din a_2 şi a_3 ambele văzute.

Tangenta într-un punct oarecare ***t,t'*** al curbei de intersecție este definită ca dreapta după care se intersectează planele tangente la cele două suprafețe după generatoarele care trec prin punctul considerat. Prin punctul ***t,t'*** trec generatoarele tt_1, $t't_1'$ ***şi*** tt_2, $t't_2'$. Planele tangente la cele două suprafețe cilindrice după aceste generatoare vor avea ca urme orizontale Rh_1 şi Rh_2, respectiv tangenta t_1h_t în punctul ***t1*** la directoarea k_1 şi tangenta t_2h_t în punctul t_2 la directoarea k_2. Cele două urme Rh_1 şi Rh_2 se întâlnesc în punctul h_t h_t', care determină împreună cu ***t,t'*** tangenta căutată th_t, $t'h_t'$.

7.4. Intersecții de poliedre cu suprafețe curbe

O suprafață curbă se intersectează cu un poliedru după o linie curbă, care are ca puncte remarcabile punctele în care muchiile poliedrului intersectează suprafața. Pe porțiunea între două asemenea puncte succesive, curba este plană, deoarece reprezintă intersecția suprafeței cu o față a poliedrului.

Metoda planelor auxiliare utilizată pentru intersecțiile de poliedre şi de suprafețe curbe se poate aplica cu folos şi în acest caz.

Fie o prismă hexagonală dreaptă de bază ***abcdef, a'b'c'd'e'f'*** (figura 7.11) care se intersectează cu un con circular drept cu vârful în ***s,s'*** şi având aceeaşi axă ***t,t'*** cu prisma (cazul unui creion hexagonal ascuțit cu o ascuțitoare mecanică). Întrucât prisma este verticală, proiecția orizontală a curbei de intersecție se va găsi chiar pe poligonul de bază ***abcdef***. Pentru a afla proiecția verticală a curbei se utilizează plane auxiliare verticale care trec chiar prin axa ***t,t'*** a celor două corpuri.

Astfel, pentru a obține punctele în care muchiile prismei intersectează conul (s-a luat ca exemplu muchia din ***f,f'***), se duce planul vertical de urmă orizontală ***sn*** prin muchia respectivă, plan care intersectează conul după generatoarea ***sn,s'n'***. La intersecția muchiei din ***f,f'*** cu generatoarea ***sn, s'n'*** se obține punctul căutat ***3,3'*** de pe curbă.

În mod similar se găseşte punctul ***1,1'*** şi ținând seama de simetria față de axă a fețelor prismei şi generatoarelor conului, punctele ***6,6'*** şi ***8,8'***.

Arcele care unesc între ele punctele aflate pe muchii sunt arce de hiperbolă, deoarece reprezintă intersecția unui con circular drept cu plane paralele cu axa. Pentru a afla vârful uneia din ramuri, de exemplu, ***2,2'***, se procedează ca mai sus: se duce planul auxiliar vertical cu urma ***sm*** trecând prin ***g***, luat la jumătatea lui ***af***; la intersecția generatoarelor ***sm, s'm'***, cu ***g2, g'2'*** se găseşte punctul căutat ***2,2'*** şi, ținând seama de simetrie, ***4,4'*** *şi* ***7,7'***. Un punct curent ***5,5'*** de pe curba se găseşte cu ajutorul planului auxiliar corespunzător, de urmă orizontală ***sr***, la intersecția generatoarei ***sr, s'r'*** a conului cu generatoarea din ***i,i'*** a prismei.

Este de observat că punctul ***4,4'*** nu se poate obține direct deoarece cele două generatoare care îl determină, ***sp, s'p'*** şi cea din ***h,h'***, sunt suprapuse în cele două proiecții. Printr-o rotație în jurul axei ***t,t'***, se pot aduce însă ambele generatoare în poziție frontală şi determina punctul de intersecție în ***4,4'***, readus apoi în ***4,4'*** printr-o rotație inversă.

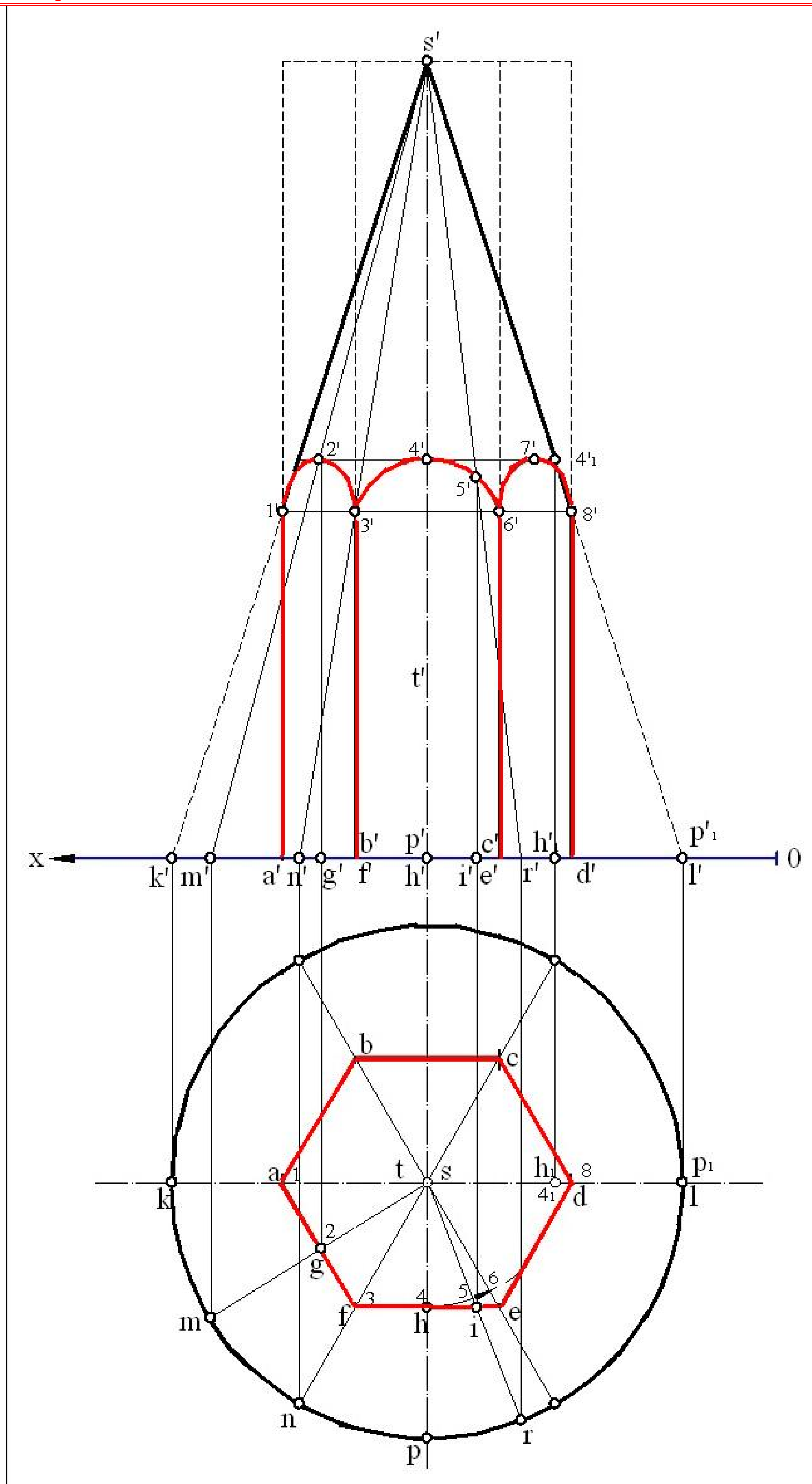


Fig.7.11.Intersecție con şi prismă.

7.5. Aplicații

1) Să se determine curba după care se intersectează două bolți cilindrice circulare cu axele coplanare-ortogonale şi cercurile directoare de raze diferite (luneta cilindrică dreaptă).

Rezolvare:

Cele două bolți se aşează cu axele paralele cu ***Ox*** şi respectiv ***Oy*** (figura 7.12). Pentru determinarea curbei de intersecție se utilizează plane auxiliare de nivel ***Rva, ...Rvd***, care intersectează ambele bolți după generatoare.

Poziția generatoarelor pe cele două suprafețe se obține utilizând şi proiecția pe planul lateral, aşa cum se arată în epură. La intersecția generatoarelor din acelaşi plan secant se obțin punctele aparținând curbei de secțiune: ***a, a', a'', b_1, b_1', b_1'', b_2, b_2', b_2''***, etc.

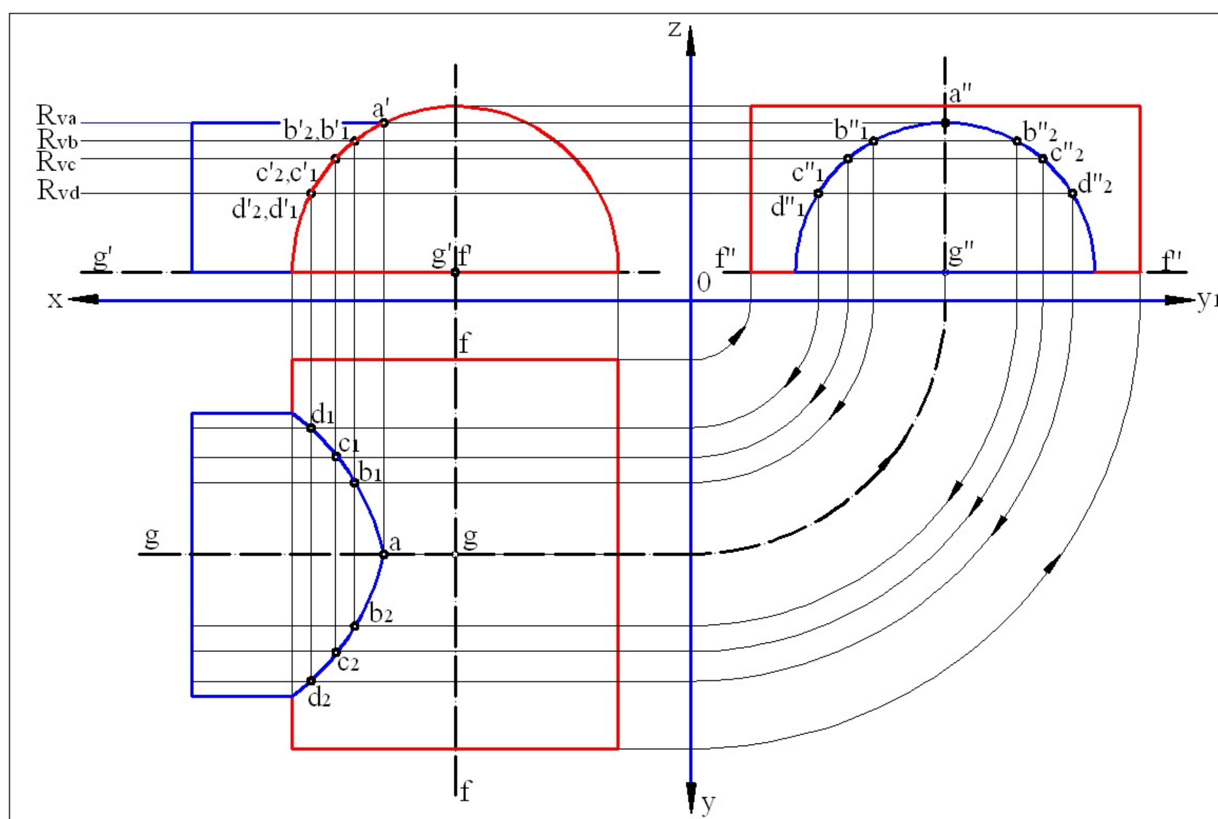


Fig. 7.12. Aplicația 1.

2) Să se determine curba după care se intersectează o boltă cilindrică circulară cu una tronconică circulară, având axele coplanare şi ortogonale (luneta conică dreaptă - conul pătrunde în cilindru).

Rezolvare:

Bolta tronconică se aşează cu axa paralelă cu ***Ox***, iar cea cilindrică cu axa paralelă cu ***Oy*** (figura 7.13).

Se pot utiliza avantajos fie plane auxiliare de capăt trecând prin ***s,s'***, fie plane de profil. Dacă se secționează ambele suprafețe cu un plan de capăt, de urmă ***Rv***, se obține în con generatoarea ***sm_0, $s'm_0'$, $s''m_0''$*** şi în cilindru generatoarea ***m_1m_2, $m_1'm_2'$, $m_1''m_2''$***, iar la intersecția lor punctul ***m, m', m''*** aparținând curbei căutate.

Dacă se utilizează planul de profil ***Ph, Pv***, acesta va secționa conul după cercul de profil de rază ***gr, g'r', g''r''*** şi cilindrul după generatoarea ***m_1m_2, $m_1'm_2'$, $m_1''m_2''$***; la intersecția lor se va obține acelaşi punct ***m, m', m"*** de pe curba de intersecție. Procedând în mod analog se pot găsi şi alte puncte necesare pentru trasarea curbei.

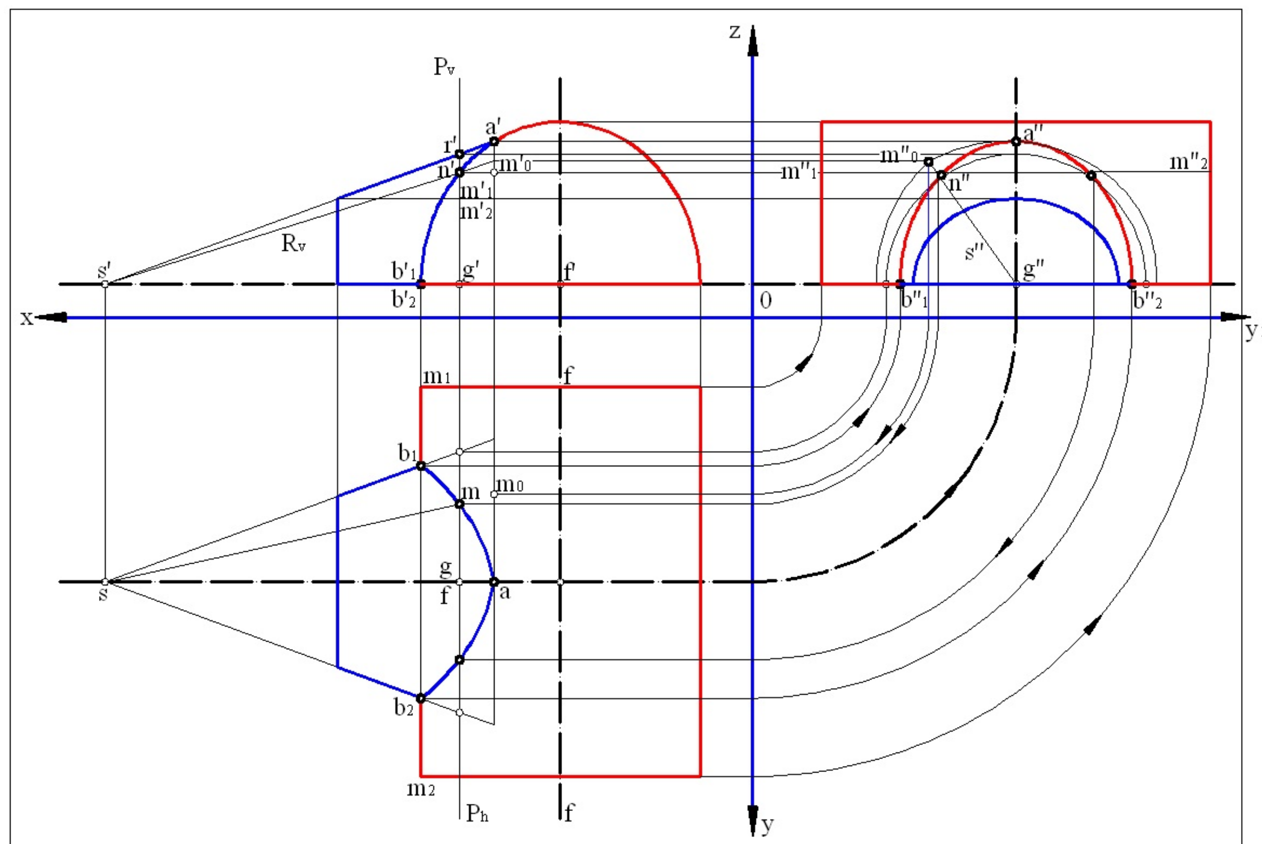


Fig.7.13. Aplicația 2.

3) Să se determine curba de intersecție a unei cupole sferice cu un turn cilindric vertical a cărui axă nu trece prin centrul sferei (figura 7.14.).

Rezolvare:

Curba de intersecție a celor două suprafețe se proiectează pe planul ***H*** chiar pe urma orizontală a cilindrului.

Pentru determinarea proiecției verticale a acesteia, se pleacă de la proiecțiile orizontale ale punctelor aparținând curbei şi se determină proiecțiile lor verticale punând condiția, ca acestea să se găsească pe sferă. Rezultă a secționa cele două suprafețe cu plane de nivel (de exemplu ***Pv***) şi a determina punctele de intersecție (***a_1, a_1' şi a_2, a_2'***) ale cercurilor de secțiune prin sferă şi cilindru.

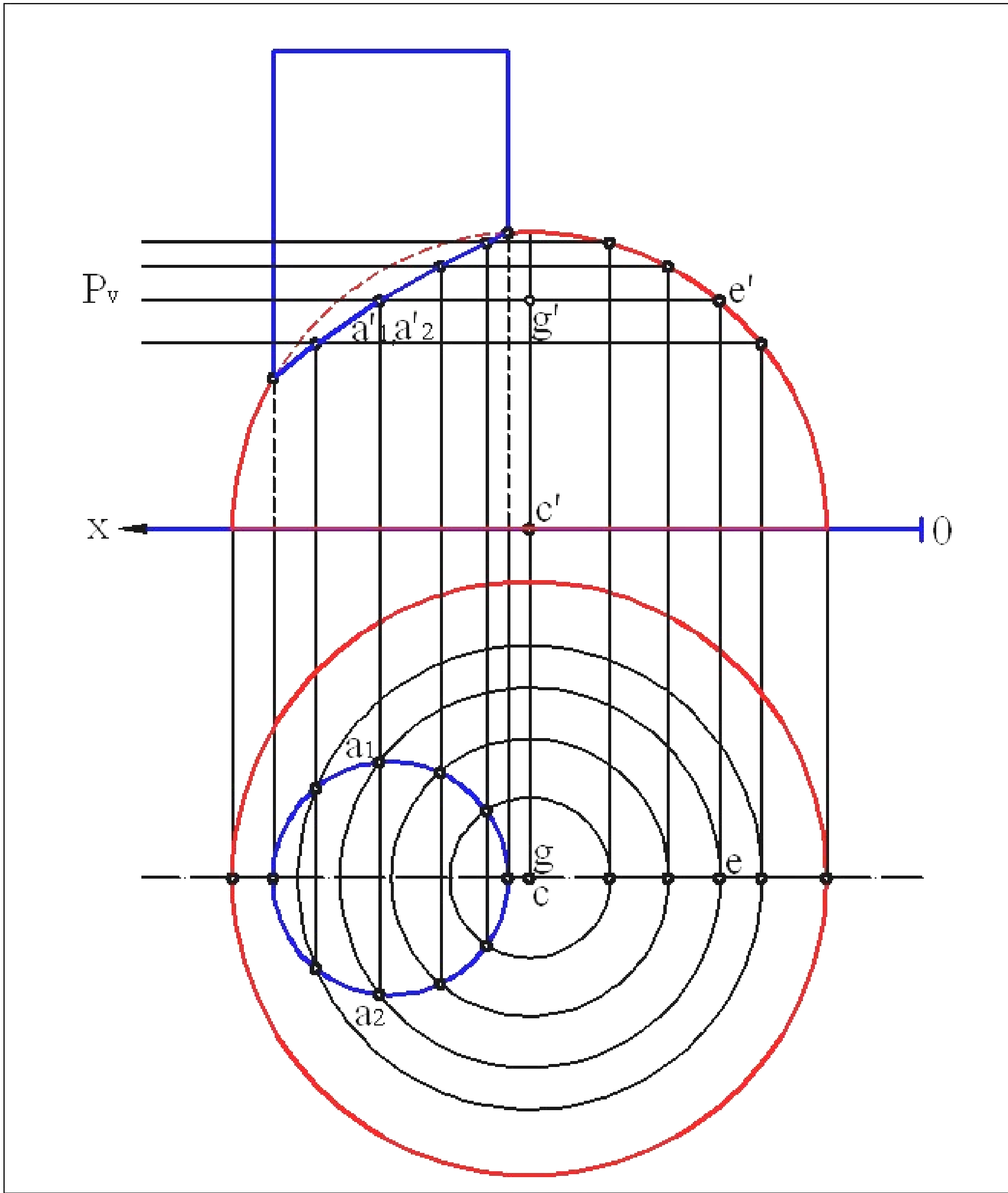


Fig.7.14. Aplicația 3.

8. SUPRAFEȚE RIGLATE

8.1. Suprafețele riglate de rotație

Din această categorie de suprafețe fac parte: conul, cilindrul şi hiperboloidul de rotație cu o pânză. Se numeşte hiperboloid de rotație, cu o pânză (figura 8.1) suprafața generată de o dreaptă care se roteşte în jurul unei axe necoplanare cu ea. Aceeaşi suprafață poate lua naştere fi prin rotația unei hiperbole în jurul axei ei netransverse.

Hiperboloidul de rotație are o largă utilizare în tehnica construcțiilor. Se construiesc în această formă: suprafețe de beton armat pentru turnuri de răcire, schelete de susținere metalice pentru rezervoare de înălțime, turnuri pentru radio şi televiziune, etc.

Pentru a reprezenta un hiperboloid de rotație în cele două proiecții este suficient să se reprezinte generatoarea şi axa în jurul căreia acesta se roteşte.

Fie ***c,c'*** axa de rotație care s-a luat verticală şi ***d,d'*** generatoarea (figura 8.2).

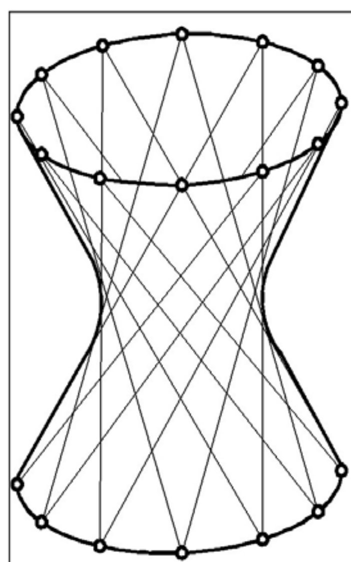


Fig. 8.1.

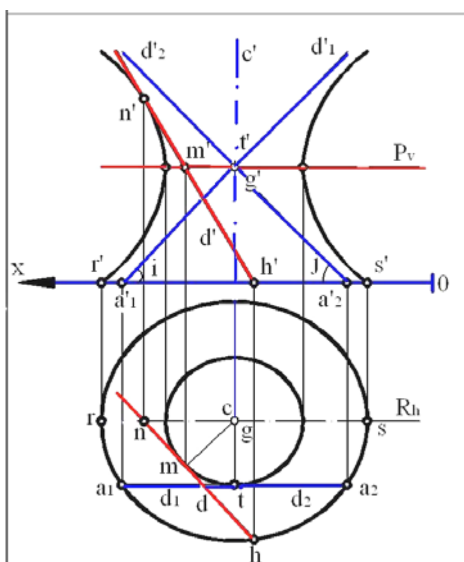


Fig.8.2.

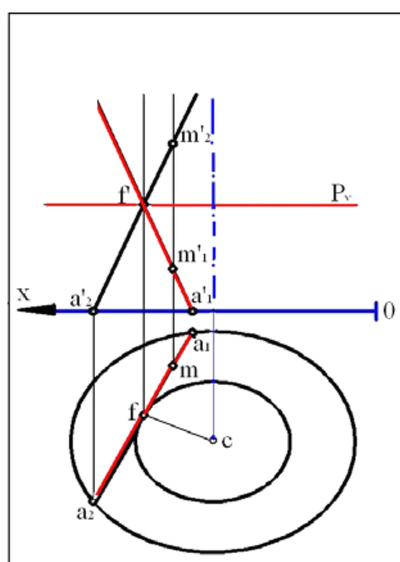


Fig.8.3.

Dacă dreapta ***d,d'*** se roteşte în jurul axei ***c,c'***, toate punctele ei vor descrie cercuri care se vor proiecta concentrice şi în adevărată mărime pe planul ***H***.

Urmărind epura, se pot deduce următoarele **concluzii:**

- Cercul de rază minimă, numit şi colier, va fi descris de punctul ***m,m'*** în care perpendiculara comună între generatoare şi axă întâlneşte generatoarea; colierul determină planul de nivel ***Pv*** care este un plan de simetrie al suprafeței.
- Proiecția orizontală a colierului constituie *conturul aparent orizontal* al suprafeței.
- Proiecția orizontală a generatoarei va fi în orice poziție a acesteia, tangentă la proiecția orizontală a colierului.
- Urma orizontală ***h,h'*** a generatoarei va descrie în timpul rotației *cercul de urmă orizontală* al suprafeței.
- *Conturul aparent vertical* al suprafeței este proiecția verticală a meridianului principal, adică a curbei ce se obține secționând suprafața cu un plan de front ***Rh*** care trece prin axa ***c,c'***. Un punct curent de pe hiperbola de contur aparent vertical ***n,n'*** de exemplu, se obține intersectând generatoarea ***d,d'*** cu planul principal ***Rh***.
- Generatoarea în poziție de front d_1,d_1' - se numeşte *generatoare principală*. Dacă se duce o dreaptă d_2,d_2' simetrică cu d_1,d_1' față de planul de profil care trece prin axa ***c,c'*** se obține o a doua dreaptă care va genera prin rotația ei aceeaşi suprafață.

Se observă că punctele dreptei d_2,d_2' descriu în timpul rotației în jurul axei ***c,c'*** aceleaşi cercuri ca simetricele lor de pe d_1,d_1'. Rezultă deci că aceeaşi suprafață poate fi generată de două sisteme de generatoare care au aceeaşi înclinare față de planul ***H (i= j).***

Cele două generatoare principale au proiecțiile verticale d_1' şi d_2' simetrice față de ***c'*** şi se intersectează în punctul ***g'*** proiecția verticală a centrului suprafeței. Cele două proiecții d_1' şi d_2' sunt *asimptotele hiperbolei de contur aparent vertical.*

Un punct oarecare de pe suprafața hiperboloidului se obține punând condiția ca acesta să se găsească pe o generatoare a suprafeței.

Fie hiperboloidul de rotație de axa ***c,c'*** (figura 8.3) dat prin cercul-colier situat în planul de simetrie ***Pv*** şi cercul de urmă orizontală al suprafeței.

Dacă se alege proiecția orizontală ***m*** a punctului căutat, se duce proiecția orizontală a_1f a uneia din generatoarele care trec prin punct, tangentă în ***f*** la proiecția orizontală a colierului.

Cu ajutorul urmei orizontale a_1,a_1' şi al punctului ***f,f'*** de pe colier se duce şi proiecția verticală a generatoarei în $a_1'f'$. La intersecția liniei de ordine duse prin ***m***, cu $a_1'f'$ se obține proiecția verticală ***m'*** a punctului căutat.

Este de observat că prin ***m*** se mai poate duce şi generatoarea a_2f, $a_2'f'$, perechea lui a_1f, $a_1'f'$, care conduce la o a doua proiecție verticală m_2' corespunzătoare lui ***m***. Există deci două puncte de pe suprafață, m,m_1' şi m,m_2' care, găsindu-se pe aceeaşi verticală, se proiectează orizontal în ***m***.

8.2. Suprafețe riglate cu plan director

Se numesc suprafețe riglate cu plan director, suprafețele generate de o dreaptă care se deplasează sprijinindu-se pe două linii oarecare şi rămâne continuu paralelă cu un plan dat oarecare.

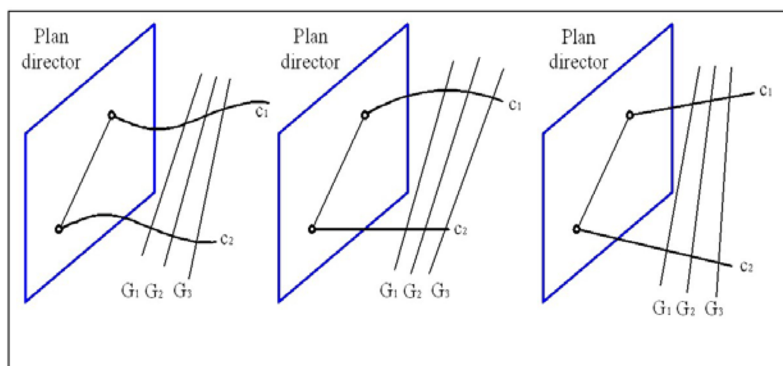


Fig.8.4.a.b.c.Cilindroid, conoid, paraboloid.

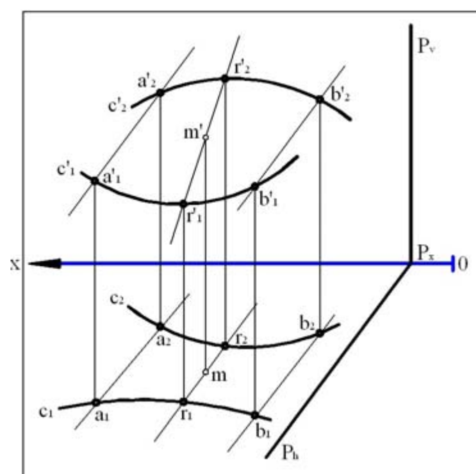


Fig.8.5.Cilindroid de plan P.

Dacă cele două linii directoare sunt două curbe oarecare (figura 8.4,a) suprafața se numeşte **cilindroid,** dacă sunt o curbă şi o dreaptă (figura 8.4,b) **conoid**, iar dacă sunt două drepte necoplanare (figura 8.4,c) **paraboloid hiperbolic**.

O proprietate comună a celor trei suprafețe reiese din însăşi definiția lor: dacă se secționează suprafața cu plane paralele cu planul director, se obțin drepte care sunt generatoarele suprafeței.

8.2.1. Cilindroidul

Pentru a reprezenta un cilindroid este suficient să se arate în cele două proiecții: poziția planului director, cele două curbe directoare şi modul cum se duc generatoarele.

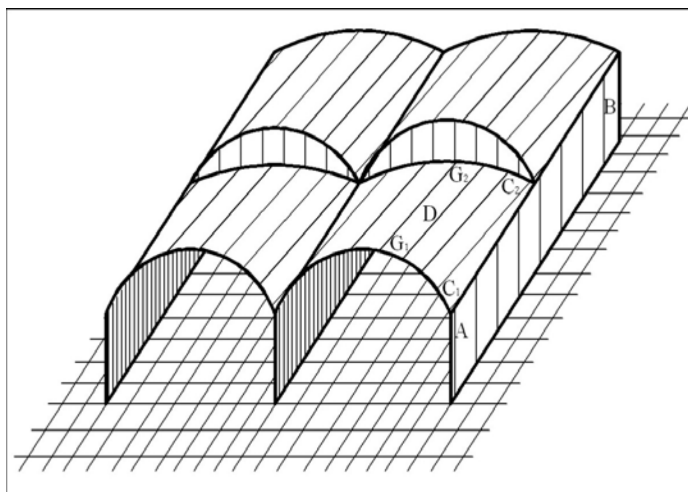


Fig.8.6. Cilindroizi, hale industriale.

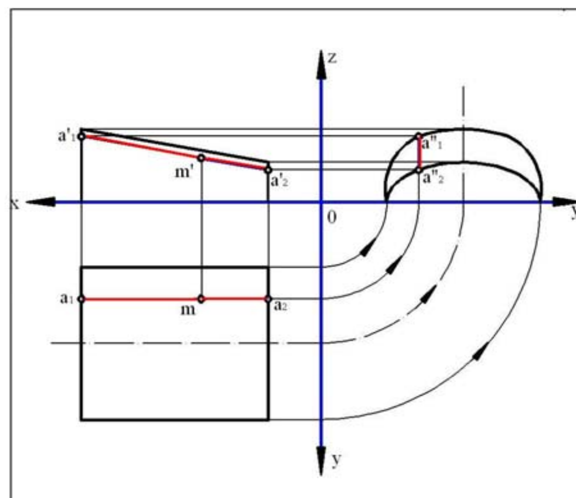


Fig. 8.7. Punct pe suprafața cilindroidului.

Astfel, în figura 8.5, planul vertical ***Ph,Pv*** s-a luat drept plan director al suprafeței, iar ***c_1,c_1'*** şi ***c_2,c_2'*** sunt cele două curbe directoare.

Pentru a duce o generatoare oarecare a suprafeței, se duce o dreaptă paralelă cu ***Ph,Pv*** de exemplu ***a_1a_2,a_1'a_2'***, care se sprijină pe cele două curbe directoare.

Pentru a obține un punct oarecare ***m,m'*** pe suprafață se ia arbitrar proiecția orizontală ***m*** şi se determină apoi cea verticală ***m'*** punând condiția ca punctul să se găsească pe o generatoare (***r_1r_2, r_1'r_2'***) a suprafeței.

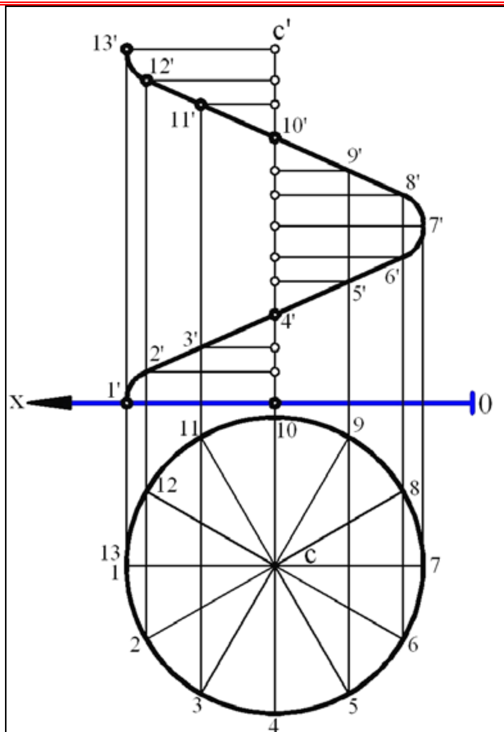
Cilindroizii îşi găsesc o largă aplicație la suprafețele subțiri de beton armat utilizate ca acoperişuri pentru halele de suprafață mare. În figura 8.6 este schițată o asemenea construcție. Cilindroizii de acoperire sunt generați de nişte drepte de tipul ***D*** care se deplasează cu un capăt pe directoarea ***C_1*** şi cu celălalt capăt pe ***C_2***, rămânând continuu paralele cu planul peretelui longitudinal ***AB***. Între curbele ***C_1*** şi ***C_2***, sunt amenajate luminătoarele care permit iluminarea naturală a halei.

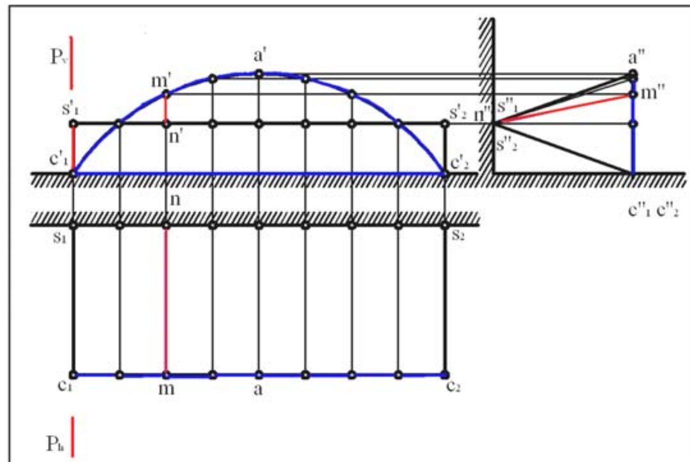
În figura 8.7 s-a luat ca plan director al suprafeței chiar planul ***V***. Pentru a obține un punct ***m,m'*** de pe suprafață şi deci o generatoare ***a_1a_2, a_1'a_2'*** a acesteia este necesară şi proiecția pe planul ***L***.

8.2.2. Conoidul

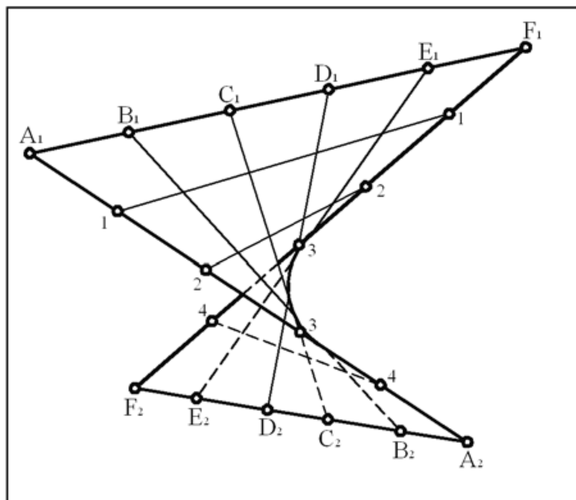
Conoidul se reprezintă ca şi cilindroidul, cu diferența că una din cele două directoare se va lua dreaptă. Dacă directoarea dreaptă este perpendiculară pe planul director, conoidul se numeşte drept. Şi în acest caz, un punct oarecare se găseşte pe suprafață dacă proiecțiile lui se găsesc pe proiecțiile de acelaşi nume ale unei generatoare a suprafeței.

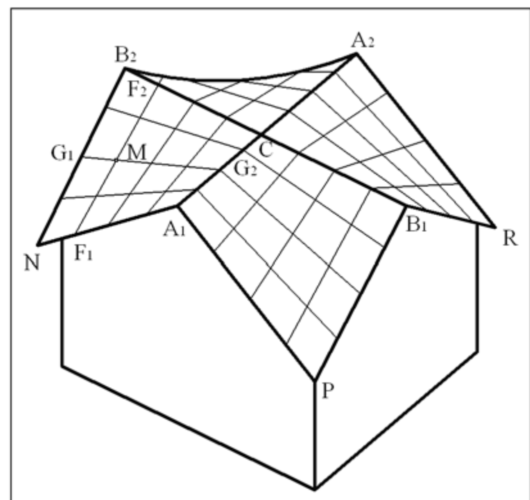
Scara elicoidală este un conoid drept (figura 8.8) cu planul director orizontal (suprafața planşeului), directoarea dreaptă verticală (axa scării), şi directoarea curbă, o elice cilindrică având ca axă, directoarea dreaptă a suprafeței. Treptele scării sunt generatoarele suprafeței.


Fig.8.8. Conoid, scară elicoidală.


Fig.8.9. Conoid, copertină.

În figura 8.9 este reprezentată în cele trei proiecții copertina în formă de conoid a intrării unei clădiri. Cele trei elemente directoare ale suprafeței sunt: planul de profil ***Ph,Pv***, curba frontală c_1ac_2, $c_1'a'c_2'$ şi fronto-orizontala s_1s_2, $s_1's_2'$. Generatoarele suprafeței sunt segmente de profil de tipul ***mn, m'n', m"n".***


Fig.8.10. Paraboloid hiperbolic.


Fig. 8.11. Paraboloizi, acoperiş.

8.2.3. Paraboloidul hiperbolic

Suprafața se obține prin deplasarea unei drepte ce se sprijină pe două drepte necoplanare astfel încât generatoarea să rămână tot timpul paralelă cu un plan dat.

Dacă cele două drepte directoare sunt paralele între ele, suprafața generată este un plan. Înclinând diferit directoarele, planul se deformează şi devine un paraboloid, de aici şi denumirea de *plan strâmb* care se mai dă acestei suprafețe.

Paraboloidul hiperbolic are, ca şi hiperboloidul de rotație studiat anterior, două sisteme de generatoare.

În figura 8.10. dacă se iau două segmente oarecare A_1F_1 şi A_2F_2 în spaţiu, cu punctele A_1 şi A_2 la un nivel şi F_1 şi F_2 la alt nivel şi se împart, spre exemplu în cinci părţi egale, se obţin punctele A_1 şi A_2, B_1 şi B_2, C_1 şi C_2 etc., care vor fi două câte două la niveluri diferite.

Dacă se unesc între ele punctele de acelaşi nivel de pe cele două segmente (A_1 cu A_2, B_1 cu B_2), se obţin drepte paralele cu planul director ***H*** (generatoarele paraboloidului).

Dacă se împart şi segmentele A_1A_2 respectiv F_1F_2 în cinci părţi egale şi se unesc între ele ***1*** cu ***1***, ***2*** cu ***2*** etc., se obţin drepte care se sprijină pe primele şi constituie generatoarele celui de-al doilea sistem.

În epură, paraboloidul se reprezintă ca şi cilindroidul prin proiecţiile celor două directoare C_1 şi C_2 - de data aceasta două drepte, urmele ***Ph,Pv*** ale planului director şi generatoarea într-o poziţie oarecare.

Ca şi la cilindroid, pentru a obţine un punct oarecare de pe suprafaţă este suficient să se pună condiţia ca acesta să se găsească pe o generatoare oarecare a suprafeţei.

Paraboloidul hiperbolic are o largă utilizare în tehnica construcţiilor. Se aplică la construcţia acoperişurilor, zidurilor de sprijin, racordarea feţelor plane de pante diferite etc.

În figura 8.11 este schiţată o clădire cu *acoperişul* format din patru paraboloizi având drept directoare coamele A_1A_2, B_1B_2 şi streşinile NA_1, PA_1, PB_1, RB_1 etc.; generatoarele sunt respectiv paralele cu feţele pereţilor exteriori ai clădirii.

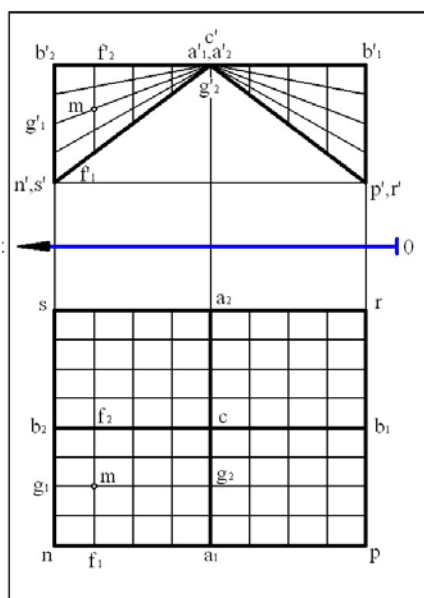


Fig.8.12. Paraboloid, acoperiş.

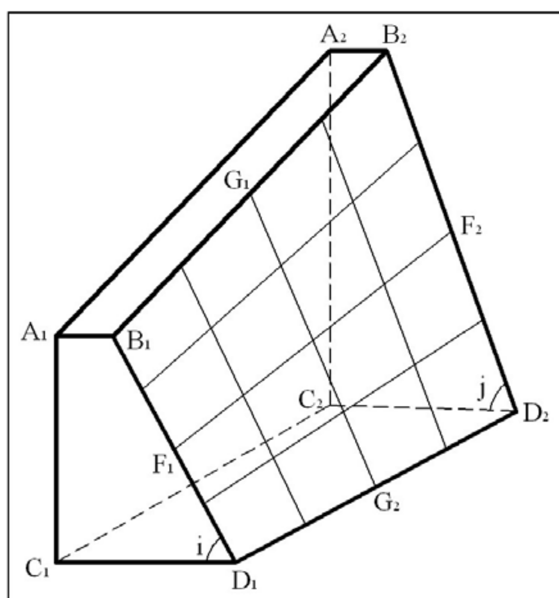


Fig.8.13.Paraboloid, zid de sprijin.

În epura 8.12. este reprezentat acoperişul în cele două proiecţii. Un punct oarecare ***m,m'*** de pe suprafaţa acoperişului se obţine în epură utilizând fie generatoarea g_1g_2, $g_1'g_2'$, paralelă cu planul peretelui ***NP***, fie generatoarea f_1f_2, $f_1'f_2'$ paralelă cu planul peretelui ***NS*** al clădirii.

Zidul de sprijin din figura 8.13. cu înălţimea variabilă ($A_2C_2 > A_1C_1$) şi dimensiunile de bază impuse ($C_1D_1 = C_2D_2$) are faţa văzută ($B_1D_1D_2B_2$) în formă de paraboloid hiperbolic. Acesta poate fi generat fie de dreptele de tip G_1G_2, care se deplasează paralel cu planul feţei $A_1B_1D_1C_1$ şi se reazemă pe directoarele B_1B_2 şi D_1D_2 fie de cele de tip F_1F_2, care se deplasează paralel cu planul feţei $A_1C_1C_2A_2$ şi se sprijină pe directoarele B_1D_1 şi B_2D_2. În figură se mai vede că paraboloidul $B_1D_1D_2B_2$ face de fapt racordarea între dreptele B_1D_1 şi B_2D_2 având pante diferite (***tg i*** respectiv ***tg j***).

9. REPREZENTĂRI AXONOMETRICE

9.1. Generalităţi. Clasificare

Reprezentarea în dublă proiecţie ortogonală prezintă avantajul că elementele care alcătuiesc obiectul, situate într-o anumită poziţie faţă de planele de proiecţie, sunt proiectate pe acestea în adevărată mărime şi deci pot fi măsurate. Feţele obiectului paralele cu unul din planele de proiecţie se proiectează ortogonal pe celălalt plan de proiecţie după segmente de dreaptă. Obiectul apare deci în proiecţie cu unele din feţe în adevărată mărime, iar cu altele, reduse la segmente de dreaptă.

Citirea epurei obiectului astfel reprezentat se face cu greutate de un observator fără o practică îndelungată în acest domeniu, deoarece pentru intuirea unui obiect sub aspectul lui de volum nu este suficientă numai simpla observare a proiecţiilor acestuia pe cele două plane de proiecţie, ci mai este necesară şi combinarea în imaginaţie a acestor proiecţii în vederea realizării volumului.

Astfel, dacă se reprezintă în dublă proiecţie ortogonală, un paralelipiped dreptunghic (figura 9.1) aşezat cu două feţe paralele cu planele de proiecţie, proiecţiile ortogonale ale acestuia se reduc la două dreptunghiuri. Privind cele două proiecţii, impresia de volum sub forma de paralelipiped nu se realizează decât numai după ce observatorul a reuşit să combine între ele în imaginaţie feţele poliedrului, după regulile care au servit la realizarea proiecţiilor lui.

Acest dezavantaj poate fi înlăturat prin proiectarea obiectului pe un singur plan, astfel încât numărul de feţe vizibile ale acestuia în proiecţie să fie cât mai mare şi nici una din feţele lui să nu apară, dacă este posibil, cu proiecţia redusă la un simplu segment de dreaptă. Reprezentarea plană astfel obţinută devine intuitivă, apropiată de cea vizuală şi deci uşor de interpretat chiar de un observator fără experienţă.

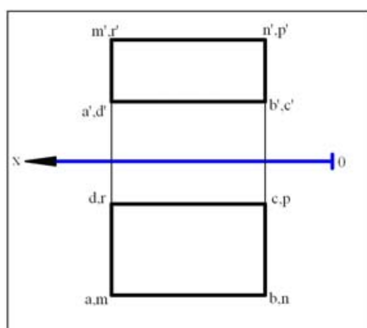


Fig.9.1.Dubla proiecţie.

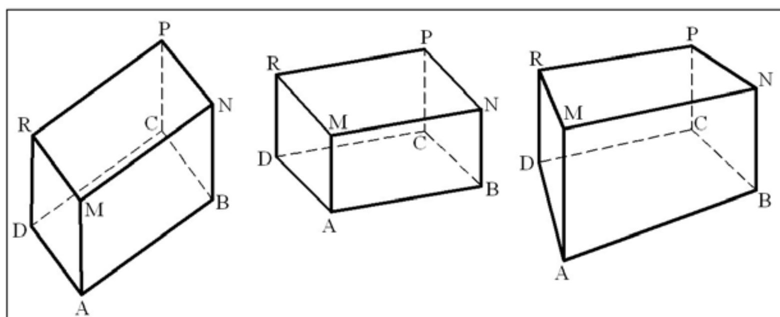


Fig.9.2.Ax.oblică. Fig.9.3.Ax.ortogonală. Fig.9.4.Perspectiva.

Realizarea unei asemenea imagini se poate obţine:
- proiectând cilindric, oblic (figura 9.2) sau ortogonal (figura 9.3) şi punând condiţia ca nici una din feţele obiectului să nu fie paralelă cu direcţia de proiectare (axonometrie paralelă);
- proiectând conic (figura 9.4) şi punând condiţia ca nici una din feţele acestuia să nu treacă prin centrul de proiecţie (axonometrie centrală sau perspectivă).

Procedeul metodei axonometrice este următorul:
- se presupune obiectul care trebuie reprezentat, raportat la cele trei axe ce definesc sistemul de referinţă al triedrului dreptunghic din dubla proiecţie ortogonală (figura 9.5);
- se proiectează cilindric sau conic pe planul de proiecţie ales, cele trei axe rectangulare ale triedrului, precum şi segmentele unitate (egale între ele) cu care se măsoară lungimile situate pe drepte paralele cu cele trei axe;

- imaginea obiectului se construieşte direct pe planul de proiecție ales, raportând punctele caracteristice ale acestuia la axele proiectate; aceste puncte se obțin cu ajutorul coordonatelor corespunzătoare raportate la axele şi unitățile proiectate respective (de unde şi denumirea de metodă axonometrică).

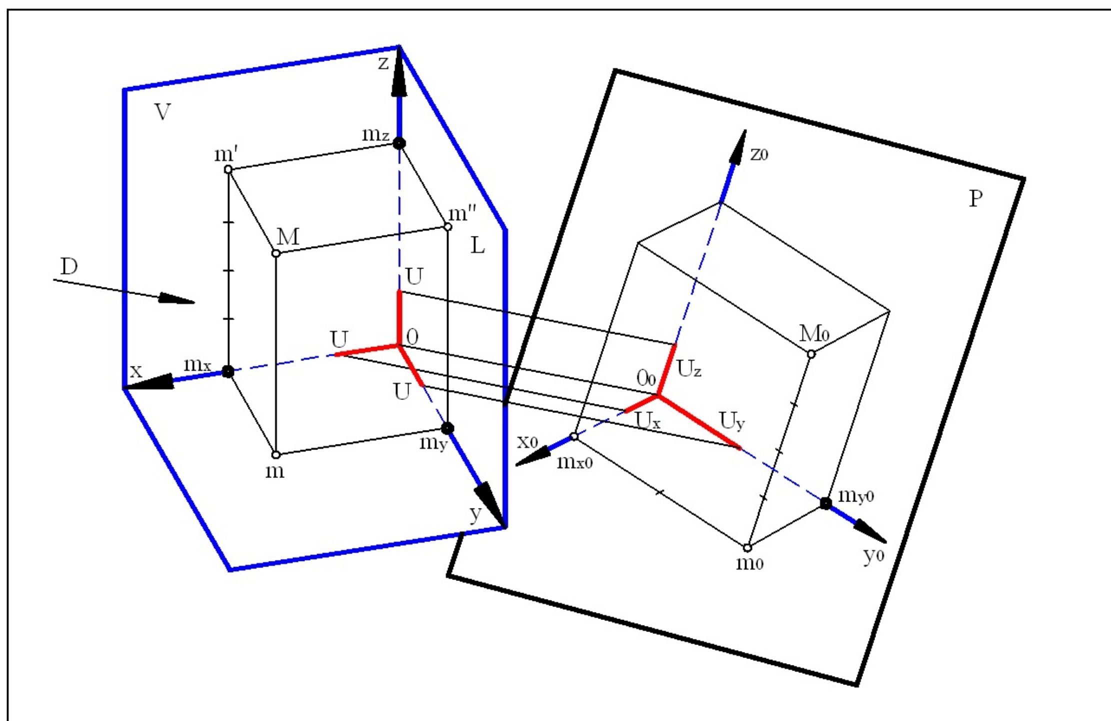


Fig.9.5.Sistemul axonometric oblic.

Se dă în figura 9.5, sistemul de referință alcătuit din planele ***H, V*** şi ***L*** cu axele ***Ox, Oy*** şi ***Oz***, ***D*** direcția de proiecție, ***P*** planul de proiecție şi un paralelipiped dreptunghic aşezat cu trei din muchiile lui pe cele trei axe, având dimensiunile ***3, 2*** şi ***4*** unități;
se mai ia punctul ***M***, vârful opus originii sistemului de referință.

Pentru a construi proiecția acestui paralelipiped pe planul ***P*** după direcția ***D*** sunt necesare numai proiecțiile celor trei axe de coordonate şi proiecțiile segmentelor unitate de pe fiecare axă.

Se dau O_0x_0, O_0y_0 şi O_0z_0 proiecțiile pe planul ***P*** după direcția ***D*** a celor trei axe ***Ox***, ***Oy*** şi ***Oz***, iar u_x, u_y şi u_z proiecțiile unităților. Acestea din urmă apar în proiecție inegale, datorită atât înclinării direcției de proiecție cât şi pozițiilor diferite ale axelor față de planul de proiecție. Vârful ***M*** de coordonate ***(3, 2, 4)*** va avea ca proiecție pe planul ***P*** un punct M_0, care se poate obține direct ținând seama de noile unități u_x, u_y şi u_z .
Se măsoară pe axa O_0x_0, de la origine în sensul pozitiv, trei unități u_x corespunzătoare abscisei punctului şi se obține m_{x0}. Pe o paralelă la axa O_0y_0 (dusă prin m_{x0}) se aşează două unități u_y, ordonata punctului, şi se determină punctul m_0 (proiecția după direcția ***D*** pe planul ***P*** a punctului ***m*** din planul ***xOy***). Pe o paralelă la axa O_0z_0 dusă prin m_0 (***Mm*** este paralelă cu ***Oz)*** măsurând patru unități u_z cota punctului, se determină M_o (proiecția pe planul ***P*** a punctului ***M***). În mod analog se determină apoi proiecțiile după direcția ***D*** a tuturor vârfurilor paralelipipedului.

Proiecția paralelipipedului obținută pe planul ***P*** prezintă două **avantaje:**
- trei din fețele acestuia apar vizibile, deci o imagine suficient de intuitivă;
- apare posibilitatea de a măsura direct pe desen, cu unitățile proiectate corespunzătoare axelor, dimensiunile liniare ce caracterizează obiectul (lungimea, lățimea, înălțimea).

Imaginile plane ale corpurilor din spațiu obținute prin folosirea celor trei axe de coordonate proiectate pe un plan şi a unităților corespunzătoare se numesc imagini axonometrice sau proiecții axonometrice, iar metoda care se bazează pe procedeele descrise, metodă axonometrică.

Planul de proiecție ***P*** se numeşte *tablou axonometric*. Proiecțiile O_0x_0, O_0y_0 şi O_0z_0 pe planul ***P***, ale axelor de coordonate ***Ox, Oy*** şi ***Oz,*** se numesc *axe imagine* sau *axe axonometrice*, iar u_x, u_y şi u_z se numesc *unități imagine* sau *unități axonometrice*.

Este de remarcat că imaginea M_0 a punctului ***M*** din spațiu luată singură față de sistemul x_0, y_0, z_0 (figura 9.6.a) nu este suficientă pentru determinarea coordonatelor acestuia, pentru că nu există posibilitatea de a-l raporta la cele trei axe imagine O_0x_0, O_0y_0 şi O_0z_0 . Dacă, însă, alături de proiecția M_0, se mai figurează pe tabloul axonometric, spre exemplu, şi imaginea axonometrică m_0 a proiecției orizontale ***m*** a punctului (figura 9.6.b), poziția acestuia devine bine determinată, întrucât raportând pe m_0 la cele două axe imagine O_0x_0 şi O_0y_0 se obțin în $O_0\,m_{x0}$ şi $O_0\,m_{y0}$ abscisa respectiv depărtarea punctului, în timp ce segmentul M_0m_0 măsoară chiar cota acestuia.

În funcție de sistemul de proiecție folosit pentru obținerea axelor imagine, se deosebesc *trei tipuri de proiecții axonometrice:*

- **axonometria oblică,** care foloseşte proiecția după o direcție ***D***, oblică fată de tabloul axonometric ***P*** (figura 9.5);
- **axonometria ortogonală,** în care direcția de proiecție ***D*** este perpendiculară pe tabloul axonometric ***P***;
- **axonometria conică sau centrală,** care utilizează proiecția conică.

Indiferent de felul proiecției, ținând seama şi de poziția pe care o poate avea tabloul axonometric față de axele de coordonate ***Ox, Oy*** şi ***Oz*** se disting trei aspecte:

Dacă tabloul este paralel cu una din cele trei axe, şi anume cu ***Oz***, rezultă că el este un plan vertical, de unde denumirea de *axonometrie verticală.*

Dacă tabloul este paralel cu două din axe, spre exemplu cu axele ***Ox*** şi ***Oz***, atunci față de sistemul de referință tabloul apare ca un plan frontal şi axonometria se numeşte *frontală.* Dacă tabloul este paralel cu axele ***Ox*** şi ***Oy,*** deci paralel cu planul ***xOy*** de referință, axonometria se numeşte *orizontală*; În cazul tabloului paralel cu axele ***Oy*** şi ***Oz***, se obține *axonometria laterală* sau *de profil,* asemănătoare cu cea frontală.

Dacă tabloul este înclinat față de cele trei axe, axonometria este *oarecare.*

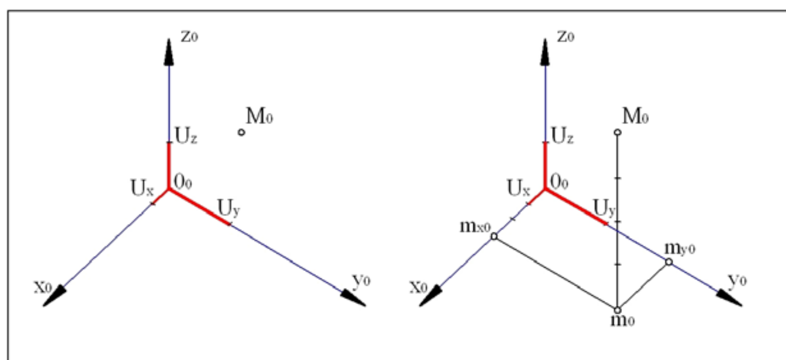


Fig.9.6.a.b. Punctul M nedefinit (a) şi determinat prin m_o (b).

Unitățile scărilor de pe axele paralele cu tabloul axonometric apar proiectate oblic sau ortogonal pe acesta în adevărată mărime, iar cele de pe axele oblice sau perpendiculare față de tablou se proiectează deformate în funcție de felul proiecției şi de înclinările axelor.

Proiecțiile axonometrice oblice şi cele ortogonale se clasifică, dacă se ține seama

de mărimile unităților imagine u_x, u_y şi u_z în:

- **izometrice**, când unitățile imagine apar egale pe cele trei axe imagine;
- **dimetrice**, dacă două din unitățile imagine sunt egale şi diferite de a treia;
- **anizometrice** sau **trimetrice,** când cele trei unități imagine sunt diferite ca mărime.

Pentru construirea imaginii axonometrice a unui obiect oarecare trebuie cunoscute: dispoziția şi dimensiunile elementelor care compun obiectul; poziția lui față de un sistem de referință determinat de trei axe rectangulare; sistemul de axe imagine şi unitățile respective obținute prin proiecția oblică sau ortogonală a sistemului de referință în care s-a fixat obiectul.

Primele două condiții se realizează prin reprezentarea atât a obiectului cât şi a sistemului de referință în dubla proiecție ortogonală.

Alegerea axelor imagine şi determinarea unităților depind de felul proiecției şi de pozițiile celor trei axe față de tabloul axonometric. Cum în general, tabloul se ia înclinat față de ***OX, OY*** şi ***OZ***, acesta este intersectat de cele trei axe, respectiv în punctele ***A, B*** şi ***C*** (figura 9.7). Dreptele care unesc două câte două aceste puncte sunt de fapt urmele fețelor triedrului determinat de cele trei axe de coordonate şi formează un triunghi ce se numeşte *triunghi urmă sau triunghi axonometric.*

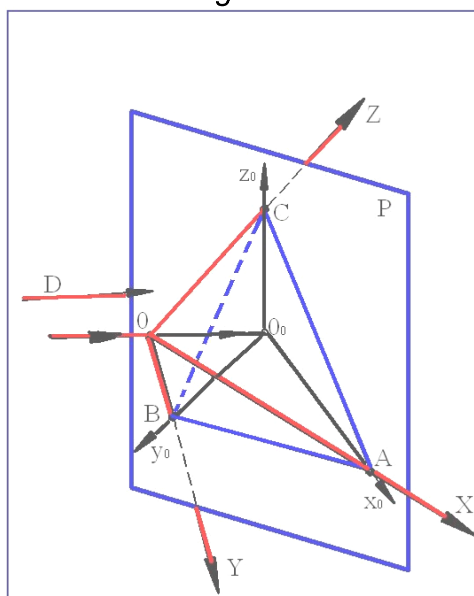


Fig.9.7.Sistem axonometric ortogonal.

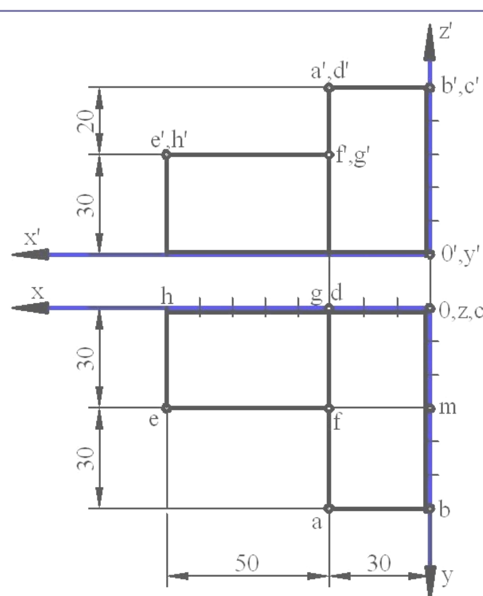


Fig.9.8.Clădire în epură.

Unind vârfurile ***A, B*** şi ***C*** ale acestui triunghi cu O_0, proiecția pe planul ***P*** după direcția ***D*** aleasă, a originii celor trei axe, se obțin în O_0A, O_0B şi O_0C respectiv cele trei axe imagine O_0x_0, O_0y_0 şi O_0z_0. Axele imagine pot forma între ele unghiuri variind de la ***0°*** la ***180°,*** întrucât prin proiecția cilindrică, unghiurile apar deformate între aceste limite.

Cum în reprezentările axonometrice interesează mai ales aspectul de volum al obiectului şi nu imaginea lui corespunzătoare unei anumite direcții de proiecție fixată față de obiect, se alege de la început un sistem de axe imagine după dorință, acest lucru fiind posibil deoarece oricărui sistem ales în planul ***P*** îi corespunde la orice direcție oblică de proiectare ***D*** un sistem de trei axe rectangulare în spațiu. În practică acest sistem imagine, luat oricum, se aşează astfel încât axa imagine O_0z_0 după care se măsoară înălțimile să fie verticală (paralelă cu marginea laterală a hârtiei), celelalte două axe imagine O_0x_0 şi O_0y_0 făcând unghiuri cu O_0z_0 cuprinse între ***0°*** şi ***180°*** la alegere.

În ce priveşte succesiunea construcțiilor grafice care trebuie executate în vederea obținerii unei proiecții axonometrice, se recomandă următorul procedeu:

Se dă o clădire oarecare, în dublă proiecție ortogonală (figura 9.8). Dacă se urmăreşte

obținerea unei imagini în care să se vadă zidurile verticale proiectate după ***he, ef, fa*** şi ***ab,*** se fixează clădirea într-un triedru dreptunghic astfel ca zidul ***hc*** să corespundă planului ***xOz***, iar originea să coincidă cu ***c*** (în proiecție orizontală).

Se iau O_0x_0 , $O_0\,y_0$ şi $O_0\,z_0$ axele imagine şi u_x, u_y şi u_z unitățile imagine respective (figura 9.9.a), luate arbitrar şi corespunzând proiecției la o direcție de proiecție oblică oarecare pe un tablou axonometric al sistemului de referință fixat față de clădire.

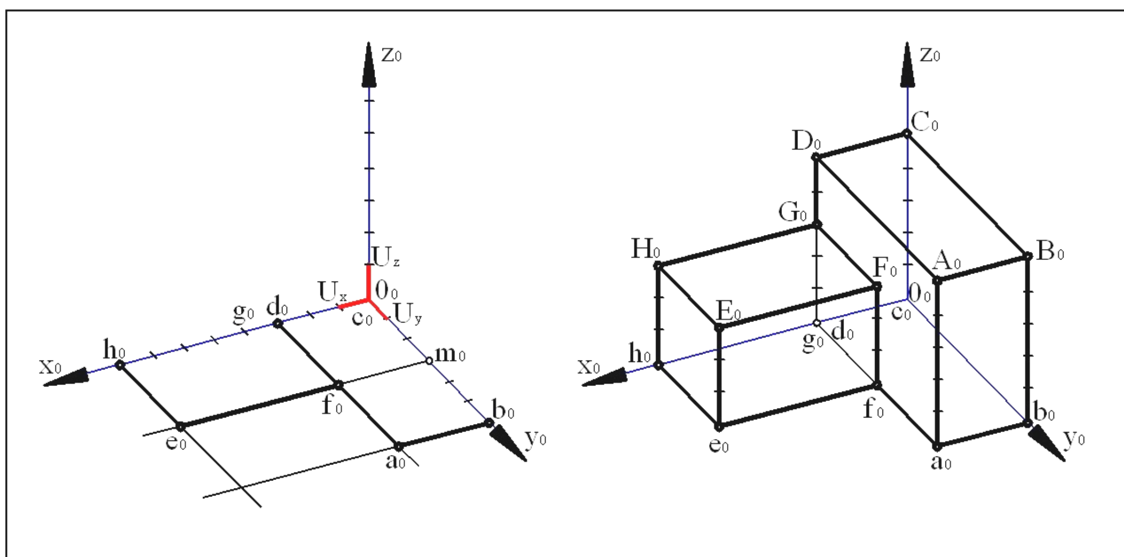


Fig.9.9. Construcția axonometriei.

Ştiind că, pentru a fi determinat, orice punct din spațiu trebuie să fie însoțit şi de proiecția lui ortogonală pe planul ***xOy***, este bine ca pentru obținerea imaginii clădirii în reprezentarea axonometrică să se reprezinte pe planul axonometric întâi „planul clădirii" (proiecția ortogonală a clădirii pe planul ***xOy***), urmând ca după aceea în funcție de „planul" reprezentat şi de cotele diverselor puncte măsurate pe paralelele la axa imagine $O_0\,z_0$ să rezulte şi proiecțiile axonometrice ale punctelor corespunzătoare din spațiu.

Se raportează deci în dubla proiecție ortogonală (vezi figura 9.8) toate punctele planului față de cele două axe ***Ox, O'x' şi Oy, O'y'*** şi se obțin pe axa ***Ox*** punctele ***h, g, d*** şi ***c***, iar pe ***Oy*** punctele ***c, m*** şi ***b.*** Aceste puncte se pot situa pe axele imagine O_0x_0 , $O_0\,y_0$ folosind unitățile imagine respective u_x şi u_y (figura 9.9.a). Paralelele duse prin d_0, g_0 şi h_0 la axa imagine $O_0\,y_0$ şi cele duse prin m_0 şi b_0 la axa imagine O_0x_0 determină două rețele de drepte pe baza cărora se desenează „planul clădirii" proiectat axonometric.

Ducând în planul axonometric (figura 9.9.b) din punctele a_0, b_0, c_0 şi d_0 paralele la axa imagine $O_0\,z_0$ şi măsurând pe acestea câte cinci unități uz corespunzătoare cotei de cinci unități ***u***, se obțin punctele A_0, B_0, C_0 *şi* D_0; analog, se obțin punctele E_0, F_0, G_0 şi H_0. Unind punctele din spațiu astfel obținute în ordinea punctelor din planul $x_0O_0y_0$, rezultă imaginea axonometrică a clădirii cu fețele orizontale $A_0B_0C_0D_0$ şi $E_0F_0G_0H_0$ văzute.

O problemă importantă în axonometrie este şi aceea a vizibilității.

Proiectând obiectul ce trebuie reprezentat şi sistemul de axe ***OXYZ*** după direcția ***D*** pe planul ***P***, imaginea obiectului poate avea două aspecte, după cum observatorul care priveşte „de-a lungul" direcției ***D*** este situat de o parte sau de cealaltă a tabloului axonometric (figura 9.10). Aceasta presupune însă o anumită orientare a triedrului dreptunghic determinat de cele trei axe.

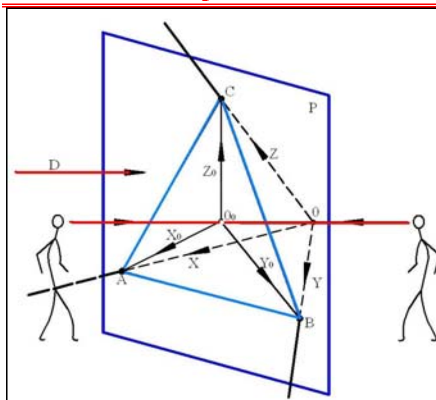


Fig.9.10. Vizibilitatea.

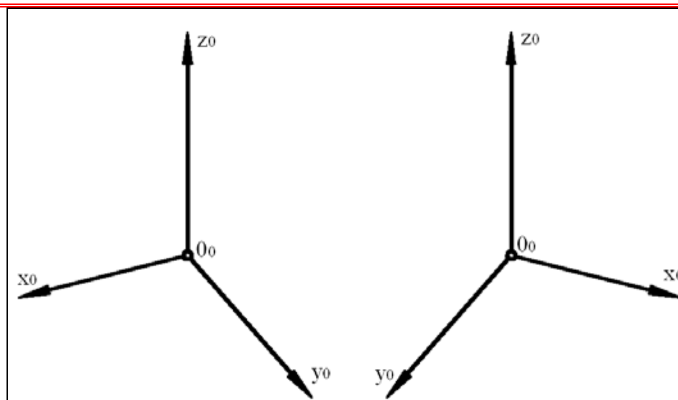


Fig.9.11.a.b. Poziția axelor.

Se consideră că cele trei axe ***OX, OY*** şi ***OZ*** au sensurile pozitive de la origine către urmele lor respective ***A, B*** şi ***C*** pe tabloul axonometric, iar triedrul determinat de axele pozitive corespunde diedrului întâi din dubla proiecție ortogonală.

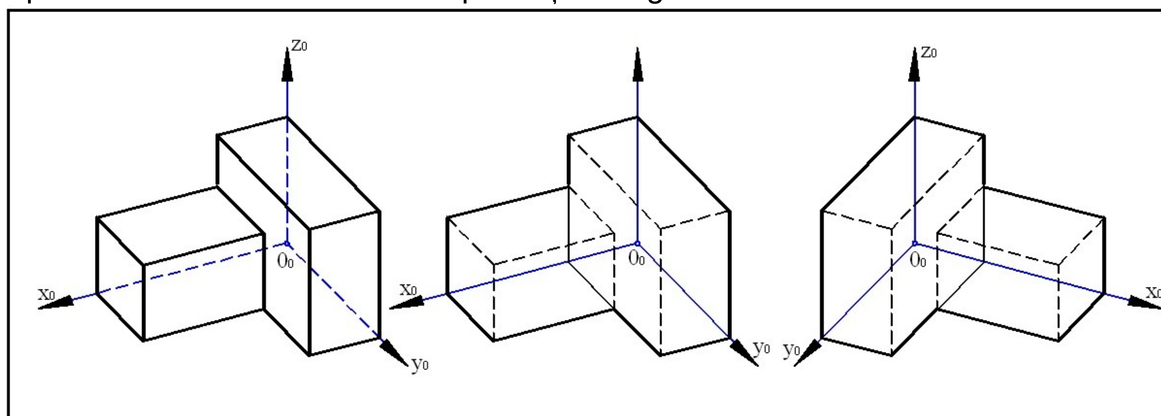


Fig.9.12.a.b.c. Vederi diferite.

Observatorul fiind situat în acest triedru (figura 9.10 şi figura 9.11.a), va privi obiectul de sus, din față şi din dreapta lui, deoarece observatorul se găseşte deasupra planului orizontal, în fața planului vertical şi la dreapta planului lateral de referință. Luând în tabloul axonometric axa imagine $O_0 z_0$ verticală şi de sens pozitiv în sus, atunci axa imagine O_0x_0 de sens pozitiv se va găsi la stânga axei imagine $O_0 y_0$.

Privind obiectul de-a lungul direcției ***D*** din partea opusă (figura 9.10 şi figura 9.11.b), deci *din afara triedrului pozitiv*, se va obține o imagine a obiectului, de jos, din spate şi din stânga obiectului. Considerând şi de data aceasta axa imagine $O_0 z_0$ verticală cu sensul pozitiv în sus, axa imagine O_0x_0 de sens pozitiv se va găsi la dreapta axei $O_0 y_0$.

În primul caz originea triedrului dreptunghic din spațiu este în spatele tabloului, iar în cazul al doilea, în fața lui.

Imaginea din figura 9.12.a corespunde, unei vederi de sus, din față şi din dreapta clădirii. Pentru a obține imaginea din sensul opus aceleiaşi direcții de privire (de jos, din spate şi din stânga clădirii), se întoarce întâi tabloul astfel ca sensul pozitiv al axei imagine O_0x_0 să fie de la stânga spre dreapta observatorului (figura 9.12.c), aşa cum priveşte de fapt observatorul această axă în spațiu (figura 9.10) şi apoi se întăresc muchiile corespunzătoare celor care apar invizibile în cazul întâi, şi invers, se desenează cu linii întrerupte muchiile care au fost vizibile.

Dacă se trasează în figura 9.12.a, fără a se schimba poziția axelor, muchiile vizibile ca invizibile şi invers (fig. 9.12.b), se obține imaginea clădirii văzută într-o oglindă situată în spatele ei şi paralelă cu tabloul, deci o imagine inversată.

9.2. Axonometria oblică

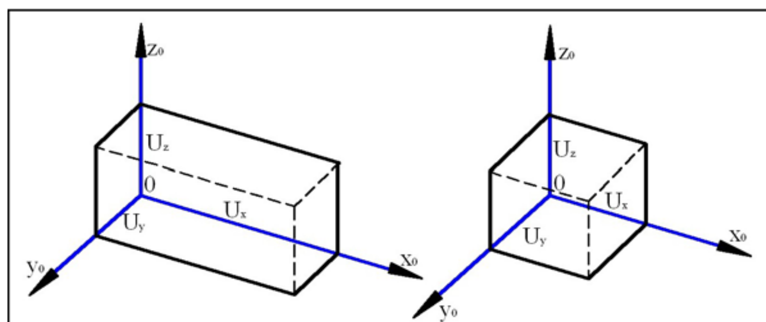


Fig.9.13.a.b. Cubul în sisteme diferite.

În axonometria oblică, întotdeauna se pot lua într-un plan ***P*** considerat ca tablou axonometric, trei axe imagine concurente într-un punct şi pe acestea, din punctul lor de intersecție, nişte segmente unitate luate arbitrar ca mărime. Acest lucru este posibil deoarece sistemul de axe imagine cu unitățile respective poate fi considerat ca fiind proiecția oblică după o anumită direcție ***D*** pe planul ***P***, a unui sistem rectangular de trei axe din spațiu şi a unităților sale.

Există deci libertatea de a alege în axonometria oblică trei axe imagine cu unitățile imagine diferite, după voie.

Această libertate trebuie însă restrânsă, întrucât, aşa cum se vede în figura 9.13.a, reprezentând un cub într-un sistem imagine având diferențe mari între mărimile unităților sale, imaginea cubului nu este naturală, nu redă aspectul unui cub deşi, o asemenea reprezentare este teoretic posibilă. Imaginea cubului va fi mai naturală dacă pe acelaşi sistem de axe imagine se vor folosi unități imagine diferite, dar de mărimi apropiate între ele, ca în figura 9.13.b.

*9.2.1. **Axonometria oblică oarecare***

Axonometria oblică, în care sistemul de axe imagine se obține prin proiecția oblică a sistemului de trei axe rectangulare ***OXYZ*** după o direcție ***D*** oarecare pe un plan ***P***, este cea mai generală. Având o imagine axonometrică obținută cu ajutorul unui anumit sistem de axe imagine, se poate trece la o altă imagine mai convenabilă din punctul de vedere al aspectului pe care-l prezintă.

În figura 9.14 s-a reluat, pentru exemplificare, clădirea dată în dublă proiecție ortogonală în figura 9.8, reprezentată în două sisteme de axe imagine diferite.

*9.2.2. **Axonometria oblică frontală***

În axonometria oblică frontală, sistemul de axe imagine se obține proiectând oblic sistemul de trei axe rectangulare ***OXYZ***, pe un plan de front sau chiar pe planul vertical ***XOZ*** al acestui sistem de referință (fig. 9.15.a.b).

Rezultă că axele imagine O_0x_0 şi O_0z_0 (proiecțiile după direcția D pe tabloul P a axelor ***OX*** şi ***OZ***, paralele cu tabloul) fac între ele un unghi de 90°, în timp ce axa imagine O_0y_0 apare după o direcție oarecare, care depinde de direcția de proiectare oblică aleasă. Axa O_0y_0 se obține unind punctul ***B***, urma axei ***OY*** pe planul ***P***, cu O_0, proiecția oblică pe tabloul axonometric a originii sistemului de axe din spațiu. Se recomandă ca direcția de proiectare oblică să se ia astfel ca axa O_0y_0 să rezulte după bisectoarea unghiului de 90° făcut de axele O_0x_0 şi O_0z_0.

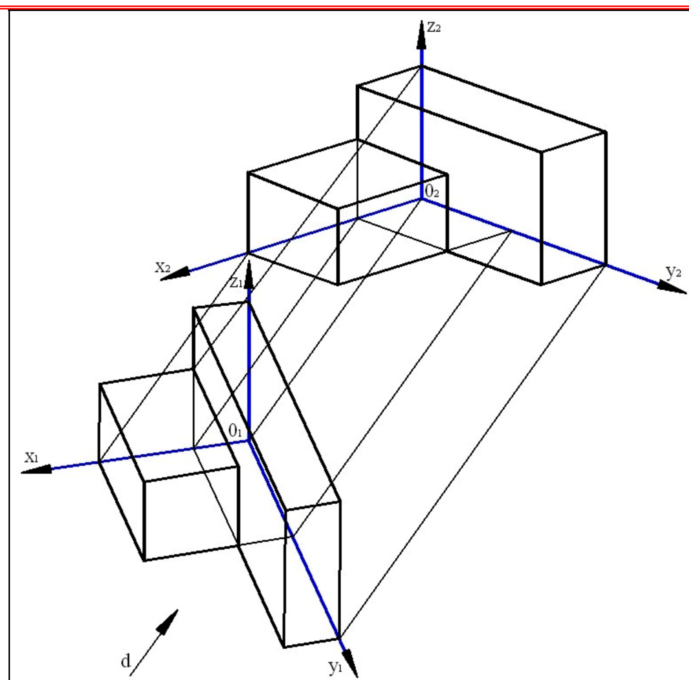


Fig.9.14. Schimbarea sistemului.

Întrucât pe cele două axe imagine $O_0 x_0$ şi $O_0 z_0$ unităţile imagine apar egale cu cele din spaţiu, şi numai cea de pe axa imagine O_0y_0 poate fi luată arbitrar, standardul recomandă ca pe O_0y_0 să se folosească o unitate imagine, fie egală cu cele de pe $O_0 x_0$ şi O_0z_0 şi atunci se obţine o axonometrie izometrică (figura 9.16.a), fie redusă pe jumătate şi în acest caz se ajunge la o reprezentare a obiectului în axonometria dimetrică (figura 9.16.b).

În figura 9.17 se arată cum se reprezintă clădirea din figura 9.8, conform procedeului recomandat, în cele două sisteme standardizate (scara după Oy, 1:1 şi 1:2) ale axonometriei frontale. Se vede că imaginea obţinută în al doilea caz (figura 9.17.b) este mai naturală.

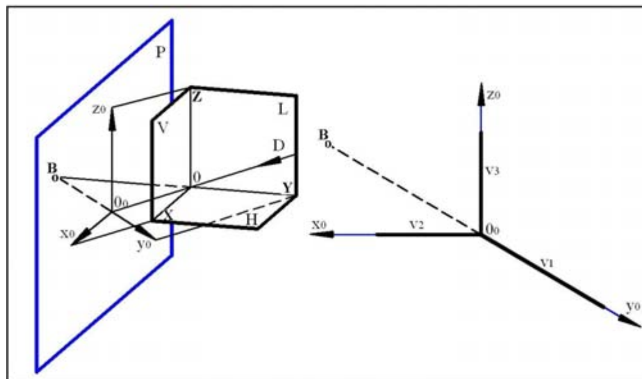


Fig.9.15. Ax.oblică frontală.

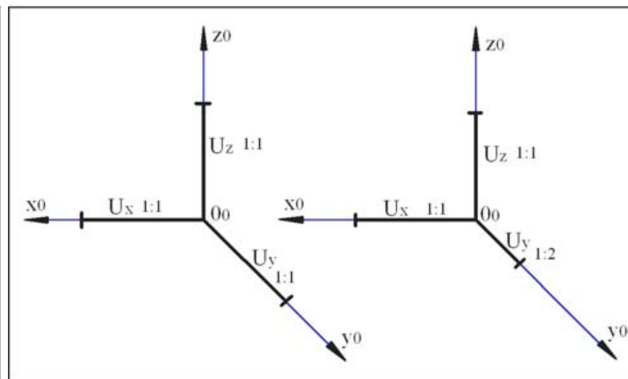


Fig.9.16.Ax.oblică frontală izometrică şi dimetrică.

9.2.3. ***Axonometria oblică orizontală***

În axonometria oblică orizontală, proiecţia oblică a sistemului ***OXYZ*** din spaţiu se face pe un plan de nivel sau chiar pe planul ***XOY*** al acestui sistem de referinţă (figura 9.18.a.b). De data aceasta axele imagine O_0x_0 şi O_0y_0 (proiecţiile după direcţia ***D*** pe planul ***P*** a axelor ***OX*** şi ***OY***, paralele cu ***P***) fac între ele un unghi de 90°, în timp ce axa imagine O_0z_0, care depinde de direcţia de proiectare oblică aleasă, se obţine unind punctul ***C***, urma axei ***OZ*** pe planul ***P***, cu O_0, proiecţia oblică pe tabloul axonometric a originii sistemului de axe din spaţiu.

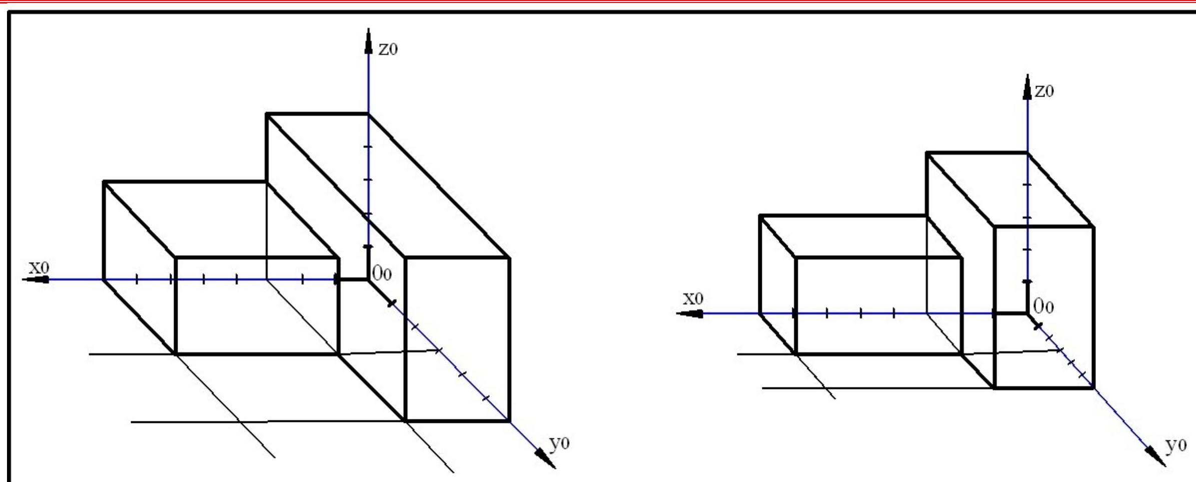


Fig.9.17.Clădirea în ax. oblică frontală izometrică şi dimetrică.

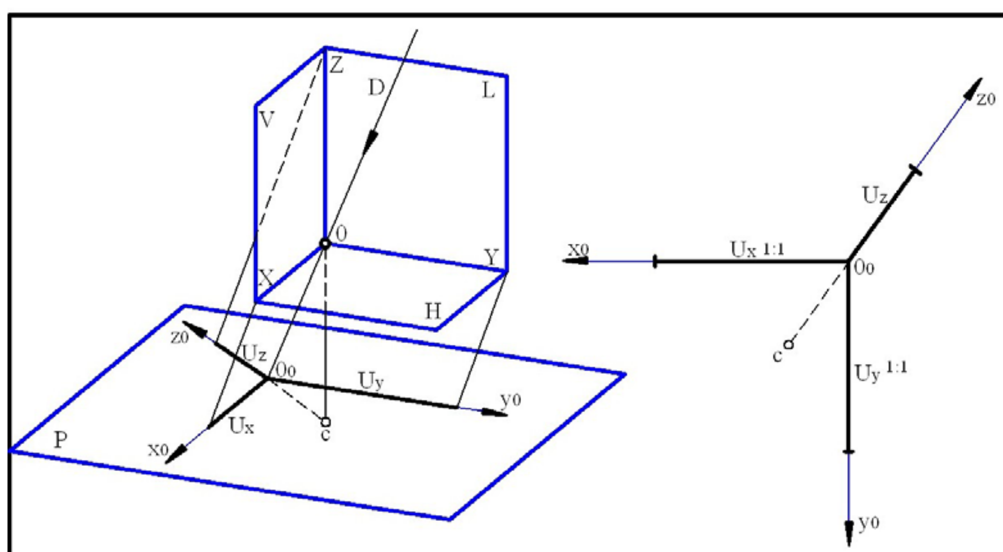


Fig.9.18.Ax.oblică orizontală

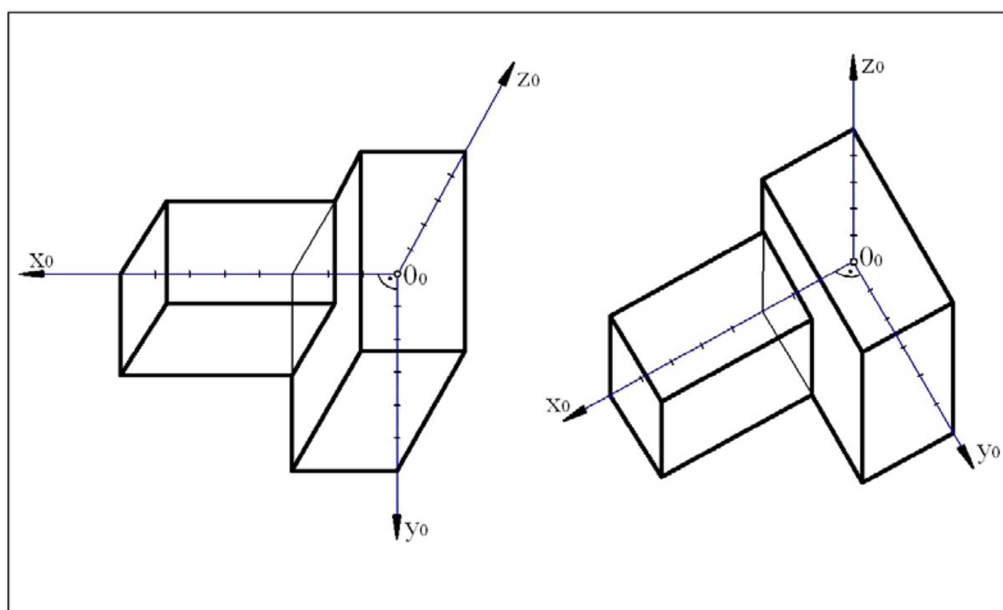


Fig.9.19.a.b. Poziția axelor în ax. oblică orizontală

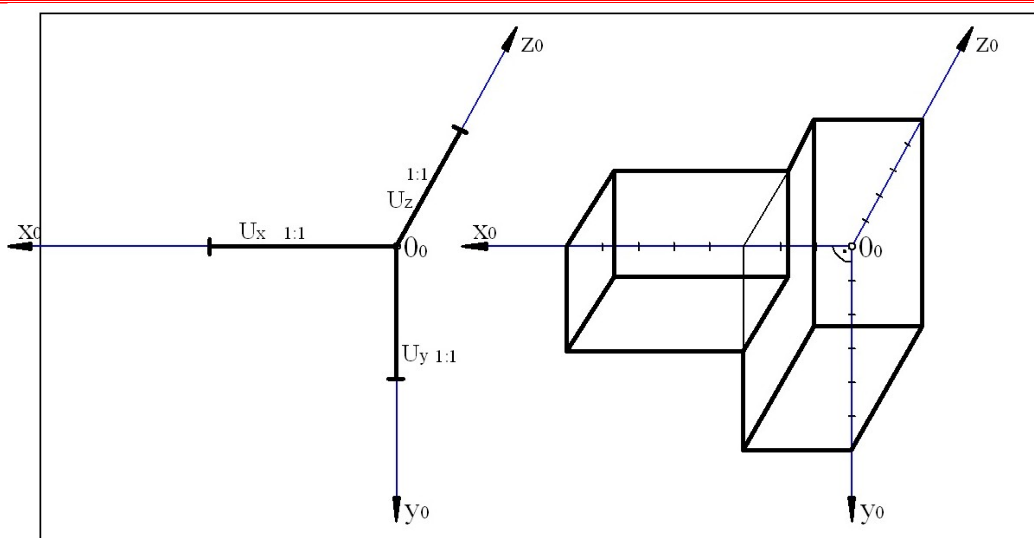


Fig.9.20. Clădirea în ax. oblică orizontală izometrică.

Pentru a reprezenta clădirea din figura 9.8, în axonometria oblică orizontală, se procedează astfel: se aşează întâi „planul clădirii" în adevărată mărime ca în figura 9.19.a; apoi folosind o direcție oarecare pentru axa imagine O_0z_0 (oblică față de O_0x_0) şi pe ea unitatea scării de măsură arbitrară, se determină imaginea volumului. Pentru construirea imaginii se foloseşte calea utilizată şi în cazurile anterioare.

Imaginea axonometrică oblică orizontală se poate obține şi cu axa imagine O_0z_0 verticală, numai că de data aceasta ”planul clădirii", în adevărată mărime, trebuie luat cu laturile lui înclinate la un unghi oarecare față de marginea hârtiei (figura 9.19.b).

Prin analogie cu axonometria frontală, şi în axonometria oblică orizontală construcțiile grafice se simplifică dacă axa imagine O_0z_0 se ia după bisectoarea unghiului de 90° făcut de axele imaginare O_0x_0 şi O_0y_0.

Utilizând unități imagine egale cu unitatea din spațiu, obținem o axonometrie izometrică (figura 9.20.a.b); utilizând unități pe axa O_0z_0 reduse pe jumătate față de cele de pe O_0x_0 şi O_0y_0 obținem o axonometrie dimetrică (figura 9.21).

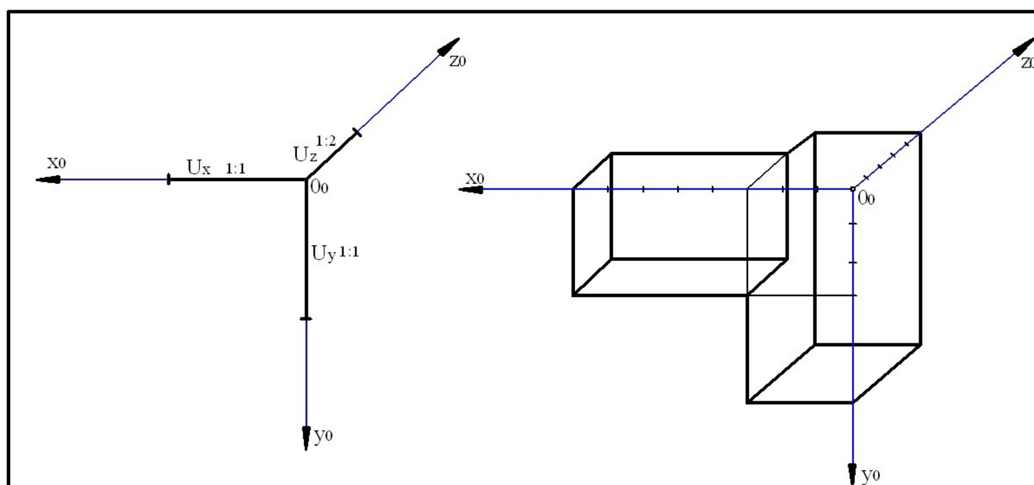


Fig.9.21. Clădirea în ax. oblică orizontală dimetrică.

9.3. Axonometria ortogonală

9.3.1. Generalități

Spre deosebire de axonometria oblică, unde într-un sistem de axe imagine dat se pot lua unități imagine după voie, în axonometria ortogonală unitățile imagine trebuie determinate. Aceasta se datorează faptului că în axonometria ortogonală, întrucât direcția de proiecție este perpendiculară pe tabloul axonometrie, imaginile axonometrice ale obiectelor apar deformate numai datorită înclinării față de tabloul axonometric, a elementelor geometrice ce le compun.

Se ştie că proiecția unui segment ***AB*** (figura 9.22) este

$$ab = AB1 = AB \cdot \cos\alpha$$

În consecință, unitățile imagine, care sunt proiecțiile unității ***U*** luată pe cele trei axe ***OX***, ***OY*** şi ***OZ***, depind de unghiurile ***α***, ***β*** şi ***δ*** pe care le fac respectiv cele trei axe din spațiu cu tabloul axonometric (figura 9.23) şi au valorile:

$$ux = U\cos\alpha, \quad uy = U\cos\beta \ \text{ şi } \ uz = U\cos\delta$$

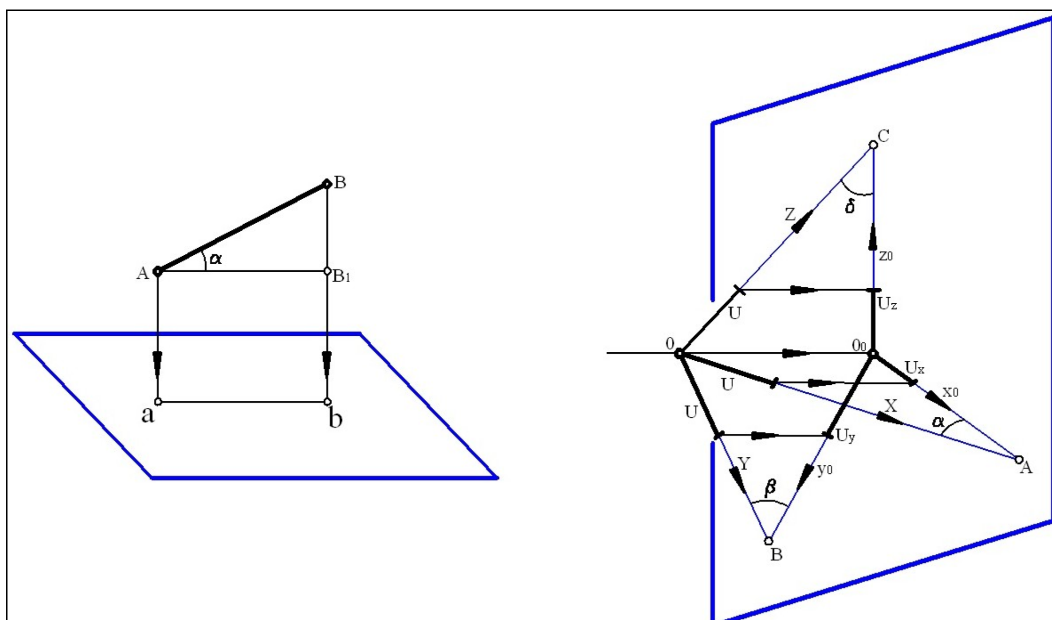


Fig.9.22. Proiectia segmentului AB. *Fig.9.23.Proiecția axelor.*

În axonometria ortogonală ***cosα, cos β, cos δ*** se numesc **coeficienți de reducere**, deoarece ei au totdeauna valoarea mai mică decât unitatea şi deci proiecțiile ortogonale ale unității ***U*** aşezate pe cele trei axe sunt întotdeauna mai mici sau cel mult egale cu unitatea din spațiu.

De aici rezultă că unitățile imagine sunt proporționale cu coeficienții de reducere corespunzători axelor.

În axonometria ortogonală, coeficienții de reducere nu pot fi luați arbitrar, între ei există relația de legătură

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\delta = 2 \ ;$$

deci dacă doi dintre coeficienți se iau arbitrar, al treilea rezultă.

Practic unitățile imagine se pot determina grafic pe baza unor proprietăți geometrice ale triedrului dreptunghic din spațiu şi a triunghiului urmă ***ABC***.

9.3.2. Axonometria izometrică, dimetrică şi anizometrică

Aşa cum s-a mai arătat, dacă se ţine seama de unghiurile pe care cele trei axe rectangulare ***OX, OY*** şi ***OZ*** le pot face cu tabloul axonometric, axonometria ortogonală poate fi izometrică, dimetrică sau anizometrică.

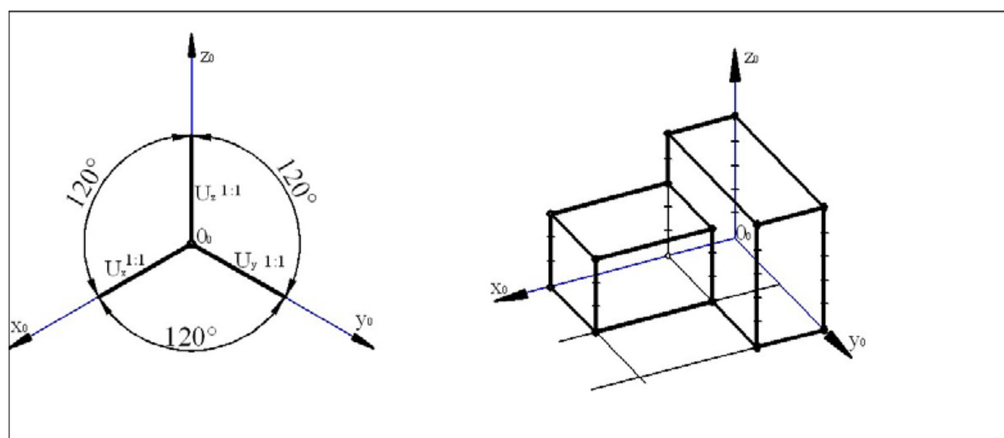


Fig. 9.24.Poziţia axelor în ax.ortogonală izometrică.

a) **Axonometria este izometrică, dacă cele trei axe *OX, OY* şi *OZ* fac unghiuri egale cu tabloul axonometric**. În acest caz, axele imagine O_0x_0, O_0y_0 şi O_0z_0 fac între ele unghiuri de 120°, iar triunghiul urmă este echilateral (figura 9.24.a). Rezultă că şi cele trei unităţi imagine sunt egale între ele, adică: **ux = uy = uz.**

Mărimea unităţilor imagine este dată de relaţia dintre coeficienţii de reducere astfel: deoarece $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\delta$, rezultă

$$3\cos^2\alpha = 2 \text{ sau } \cos\alpha = \sqrt{2/3} = \sim 0{,}82, \text{ deci } ux = uy = uz = \sim 0{,}82\ U.$$

Practic, unităţile imagine se iau în adevărată mărime, obţinându-se o imagine axonometrică mai mare dar omotetică cu cea construită pe baza unităţilor imagine reale.
În figura 9.24.b este reprezentată în axonometria izometrică clădirea din figura 9.8.

b) **Axonometria este dimetrică, dacă două din axele triedrului *OXYZ* au aceeaşi înclinare, iar a treia diferită.** În acest caz triunghiul axonometric este isoscel.
Rezultă, deci, aceeaşi scară pentru cele două axe care sunt simetrice faţă de a treia, pe care scara este diferită. Normele recomandă să se ia unghiurile între axe ca în figura 9.25.a, având unităţile imagine egale cu unitatea, pe axele imagine O_0x_0 şi O_0z_0 şi pe jumătate pe cea de-a treia axă O_0y_0.

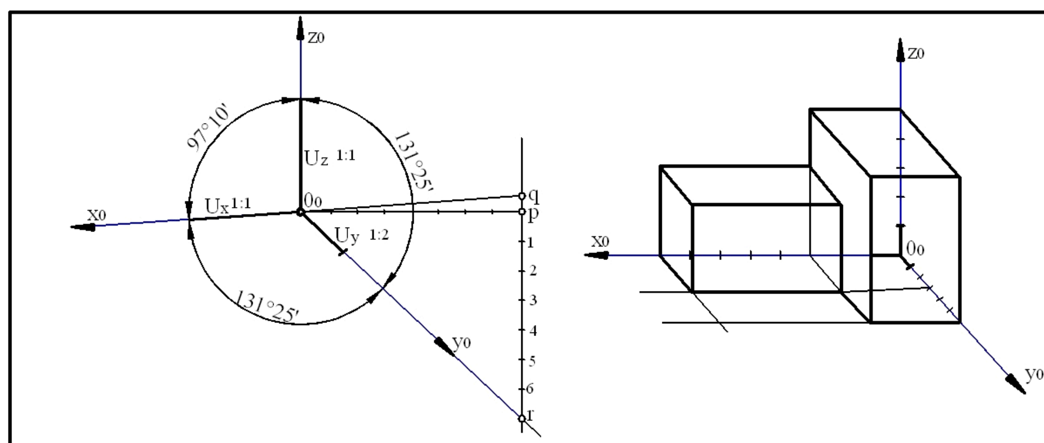


Fig.9.25.Poziţia axelor în ax.ortogonală dimetrică.

Practic, în acest caz, pentru construirea axelor imagine se procedează astfel:
Se ia axa imagine O_0z_0 verticală (fig. 9.25, a). Pe o perpendiculară la această axă dusă prin O_0 se iau opt unități la dreapta lui O_0, şi se obține un punct ***p***. Pe o paralelă la axa O_0z_0 dusă prin ***p*** luând o unitate de la acest punct în sus şi şapte unități în jos, se obțin punctele ***q*** şi ***r***. Unind pe ***q*** şi ***r*** cu O_0 se obțin axele O_0x_0 respectiv O_0y_0.
În figura 9.25.b, este reprezentată în axonometria ortogonală dimetrică ***1:1, 1:2, 1:1***, clădirea din figura 9.8.

c) Axonometria este anizometrică, dacă axele triedrului *OXYZ* au înclinări diferite. Axele imagine O_0x_0, O_0y_0 şi O_0z_0 fac unghiuri inegale, iar triunghiul urmă este oarecare. Rezultă că scările sunt diferite.

9.4. Aplicații

În reprezentările care urmează fiecare imagine a obiectului se va însoți de sistemul de axe imagine şi de scările corespunzătoare axelor utilizate pentru construirea imaginilor.

1. Reprezentarea unei clădiri în axonometria oblică izometrică

Se dă o clădire în dublă proiecție ortogonală (figura 9.26.a). Pentru ca fețele verticale ***ab, rskl, ijef, tm, fg, bkec*** să fie văzute, se alege sistemul de axe imagine ***xOy*** cu ***Ox*** suprapus pe latura ***pr*** şi ***Oy*** pe ***hg*** (corpul de clădire să se găsească în triedrul I).

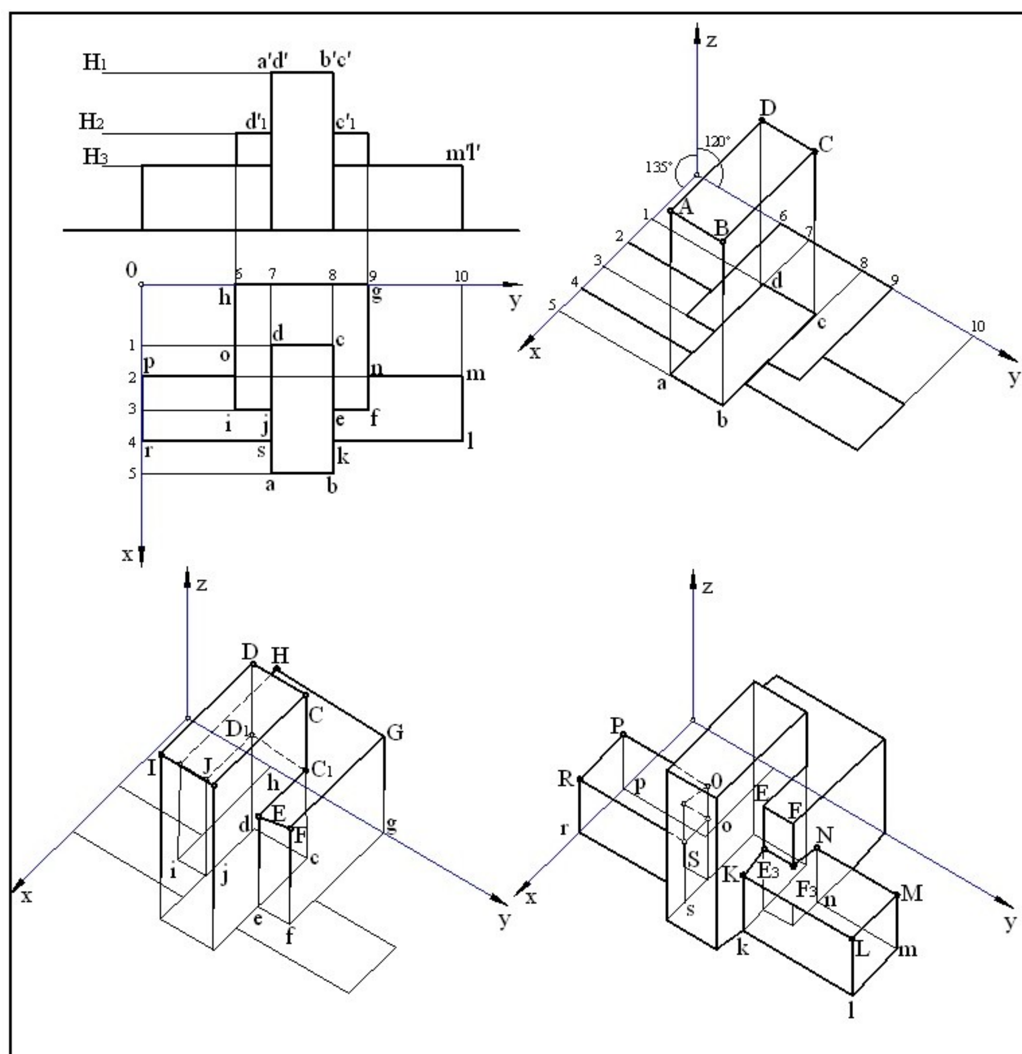


Fig. 9.26. Aplicația 1.

Un sistem de axe imagine utilizat foarte des în practică este cel în care axele imagine fac unghiuri de 105°, 120° respectiv 135°, deoarece, în cazul fixării axei ***Oz*** în poziție verticală, celelalte două direcții ale axelor imagine ***Ox*** respectiv ***Oy*** pot fi trasate cu echerele la 30° şi 45°. În figura 9.26 s-a luat un astfel de sistem de axe imagine.

Deoarece reprezentarea se face în axonometria oblică unitățile pot fi luate în adevărata mărime. Imaginea axonometrică se poate obține respectând procedeul amintit.

Ducând prin toate punctele planului drepte paralele la ***Oy*** respectiv ***Ox*** se obțin pe axa ***Ox*** punctele ***1-5*** şi pe ***Oy*** punctele ***6-10*** (figura 9.26.a). Aceste puncte se transpun pe axele imagine ***Ox*** respectiv ***Oy*** (figura 9.26, b) şi prin paralele la ***Oy*** şi ***Ox*** se obțin cele două rețele de drepte paralele în axonometrie cu unghiul de ***90°*** deformat, pe baza cărora se desenează „planul" în reprezentarea axonometrică.

Pentru ridicarea în spațiu, se începe cu volumul cel mai înalt. Din punctele ***a, b, c şi d*** se trasează verticale până la înălțimea dată de nivelul H_1 şi se obțin punctele ***A, B, C*** şi ***D***, care unite dau fața superioară a corpului de clădire central, văzută în totalitate.

Se coboară din punctele ***A, B*** şi ***C*** verticalele văzute, după care se trece la ridicarea volumului limitat de nivelul H_2.

Prin ridicarea punctelor ***e, f, g, h, i, j, d şi c*** la cota dată de nivelul H_2 se obține linia poligonală $EFGHIJD_1C_1$ din care se vede numai C_1EFGH şi o porțiune mică din H_1. Se trasează apoi verticalele din ***E, F*** şi ***G*** văzute (figura 9.26.c).

Se ridică şi punctele ***k, l, m, n, f, e şi o, p, r, s, j şi i*** la nivelul dat de H_3, obținându-se partea superioară a celor două corpuri laterale. Deoarece fața superioară $KLMNF_3E_3$ se vede în întregime, se trasează cu linie întărită şi se coboară verticalele văzute din punctele ***K, L*** şi ***M.***

Pentru cel de-al doilea corp lateral se vede numai verticala din punctul ***R***.

2. Reprezentarea unei scări cu două rampe în axonometrie ortogonală izometrică

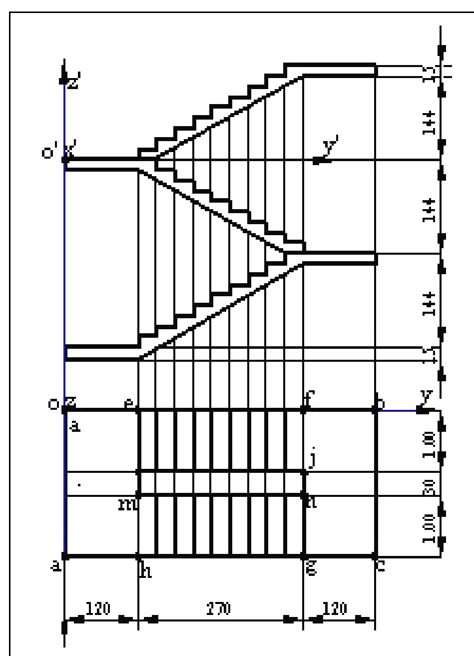
Se dă în figura 9.27.a la scara 1:100, planul şi elevația unei scări, iar în figura 9.27.b, sistemul de axe imagine $O_0x_0y_0z_0$ în axonometria ortogonală izometrică, corespunzător sistemului ***Oxyz***, ***O'x'y'z'*** față de care s-a fixat scara. Unitățile imagine s-au luat mărite pentru a se obține o imagine axonometrică mărită.

Pentru construirea imaginii axonometrice se recomandă calea următoare:

- Se reprezintă întâi „planul" cu ajutorul rețelelor de drepte paralele la cele două axe imagine ***Ox*** şi ***Oy*** şi se obțin, în reprezentarea axonometrică, proiecțiile podestelor după $a_oe_oh_od_o$ şi $f_ob_oc_og_o$ şi a rampelor fără trepte după $e_of_oj_oi_o$ şi $m_on_og_oh_o$ (figura 9.27.b).
- Se ridică şi se coboară podestele, cu grosimea respectivă, la nivelurile corespunzătoare cotelor din elevație, după care apoi se reprezintă şi rampele cu grosimea respectivă.
- Se reprezintă apoi elementele de detaliu (treptele scărilor) folosindu-se diviziunile date de punctele $i_o,1,2,...,8,j_o$ şi $m_o,9,10,...,n_o$ pe segmentele de dreaptă i_oj_o respectiv m_on_o (figura 9.27.c).

Verticalele duse prin punctele $i_o,1,2,...,8,j_o$ la intersecție cu dreptele i_58_1 şi i_oj_2 dau puncte ce determină secțiunea în trepte. În mod analog se obține apoi şi secțiunea în treptele rampei a doua, folosind punctele de pe dreptele $9,n_5$ ***şi*** m_on_1 date de verticalele duse prin $m_o, 9, 10, ..., n_o$.

Dreptele e_58_2 şi h_og_i vor delimita muchiile treptelor de partea cealaltă.



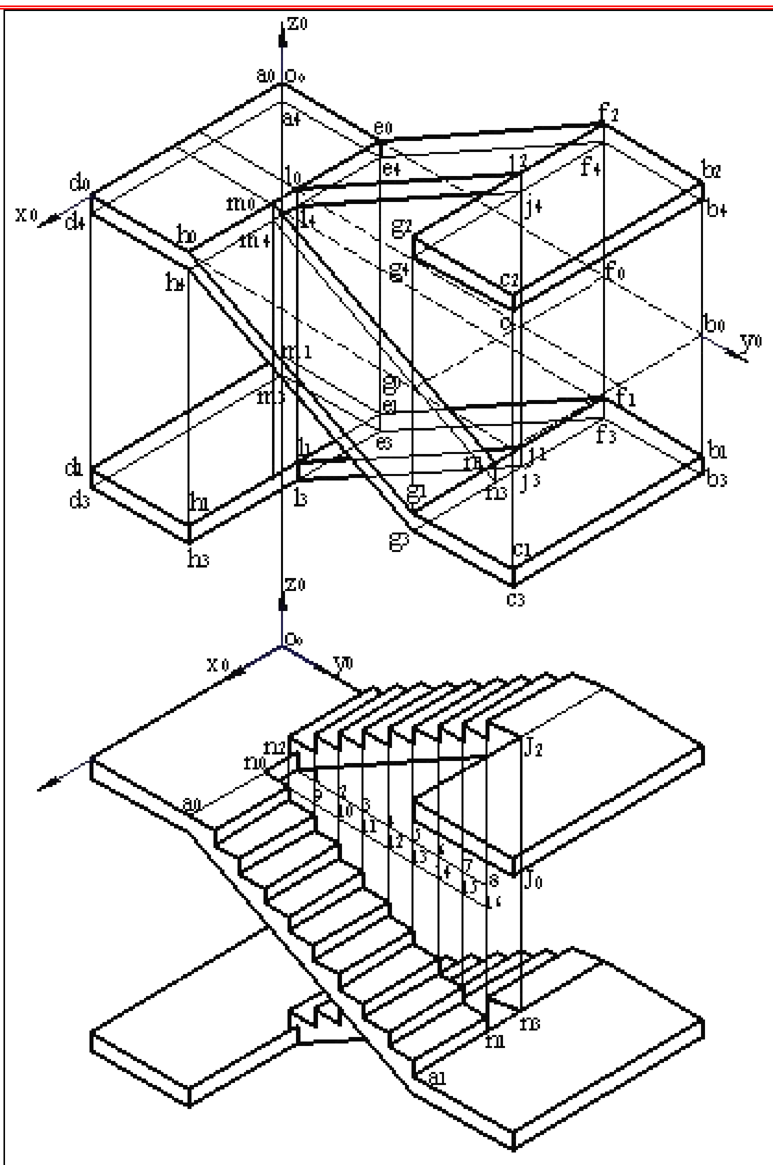


Fig.9.27.a.b. Aplicația 2.

3. Reprezentarea unei clădiri în axonometrie ortogonală dimetrică

Pentru a se obține imaginea unei clădiri, cât mai apropiată de cea naturală, este indicată reprezentarea în axonometria ortogonală.
Se dă în figura 9.28.a, o clădire reprezentată în dublă proiecție ortogonală. Se alege sistemul de axe ***Oxyz, O'x'y'z'*** astfel ca observatorul situat în triedrul pozitiv să vadă fețele verticale ***ad*** şi ***ab***.

Se va folosi sistemul de axe imagine din axonometria ortogonală dimetrică standardizată. S-a luat axa imagine $O_o y_o$ cu un unghi mai mic față de $O_o z_o$ decât cel pe care-l face $O_0 x_0$ cu aceeaşi axă pentru ca fațada ***ad*** să fie văzută mai mult.

Se reprezintă întâi „planul" clădirii, după care se ridică fața orizontală superioară a corpului ***abcd*** după $A_oB_oC_oD_o$, văzută în întregime. Se trece apoi la ridicarea punctelor ***e, f, g, h*** *şi* ***b*** respectiv în E_o, F_o, G_o, H_o şi B_1 şi se obține fața orizontală superioară a celui de-al doilea corp, ce nu mai apare văzută în întregime. Coborând punctele i_o, j_o, a_o şi d_o respectiv în I_o, J_o, A_1 şi D_1 se obțin elementele părții inferioare a bazinului.

Pentru trasarea umbrelor s-a luat direcția R_o, r_o a razelor de lumină. Verticala A_1A_o poartă umbra reală după linia frântă $A_1K_1K_2K_3A_{he}$, de unde conturul umbrei purtate se continuă cu A_{he},K_4U_1 purtată de A_oB_o (segmentul A_{he} K_4 a fost determinat unind pe A_{he} cu ***T*** urma dreptei A_oB_o pe fața verticală e_oh_o).

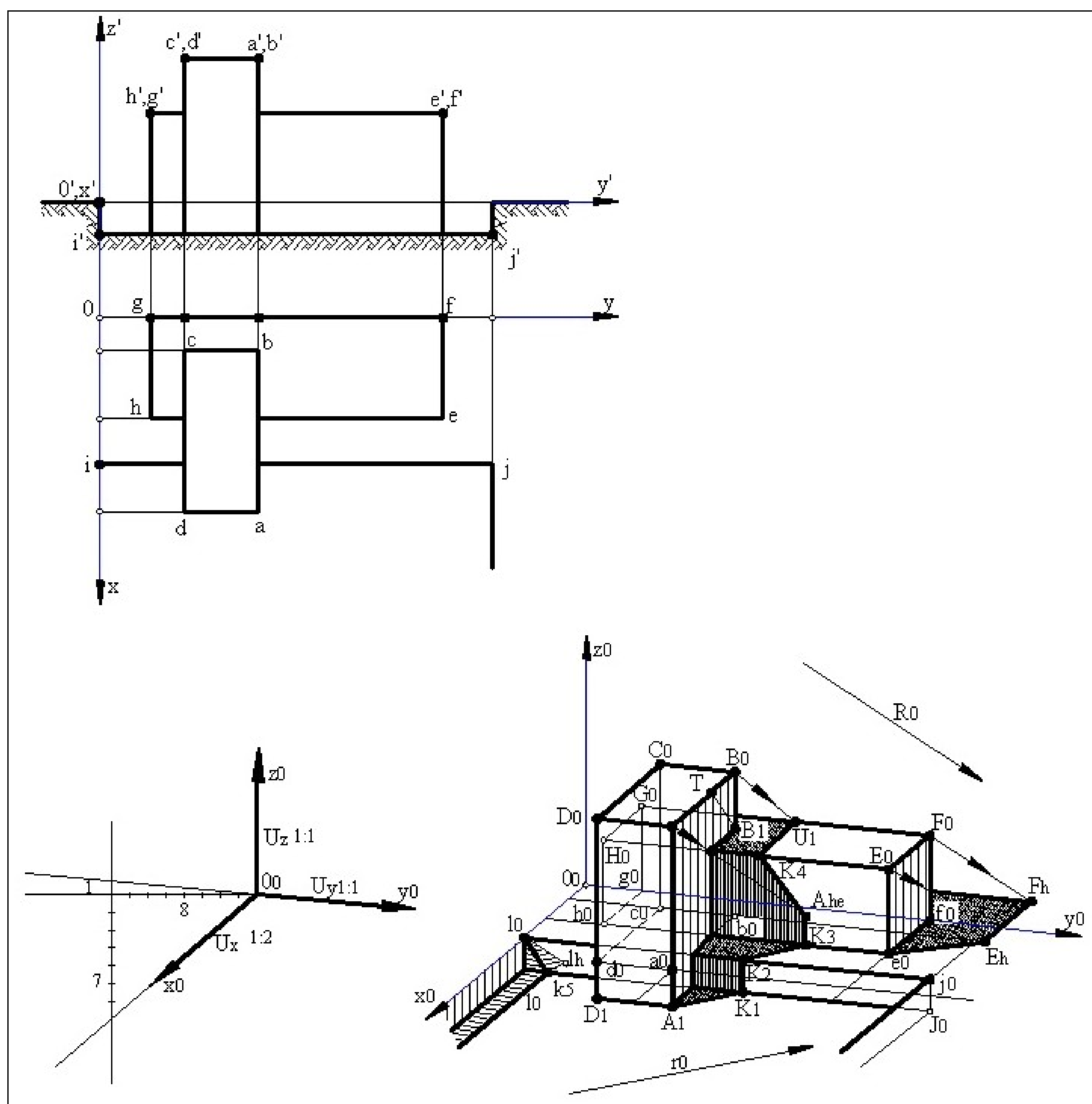


Fig.9.28. Aplicația 3.

Se obțin apoi umbrele punctelor E_o şi F_o pe planul ***xOy***, respectiv după E_h şi F_h din unirea cărora rezultă conturul de umbră $e_oE_hF_h$ continuat cu paralela dusă prin F_h la F_oG_o. Linia frântă alcătuită din i_ok5 şi paralela dusă prin ***k5*** la axa O_ox_o reprezintă conturul umbrei purtate pe bazin.

10. ACOPERIŞURI

10.1. Generalităţi

Acoperişul este elementul constructiv care limitează o clădire la partea superioară şi are rolul de a apăra clădirea împotriva influenţei factorilor atmosferici.

Acoperişul este alcătuit dintr-un schelet de rezistenţă numit şarpantă, care susţine elementul izolator - învelitoarea. Pentru ca apele provenite din ploi sau topirea zăpezilor să nu stagneze pe învelitori şi să poată fi evacuate prin jgheaburi şi burlane, acoperişurile se fac fie din plane înclinate numite ape sau versanţi, fie în forma unor suprafeţe curbe oarecare. Înclinarea versanţilor unui acoperiş depinde în primul rând de materialul din care este alcătuită învelitoarea. Astfel, un material mai poros cum este ţigla necesită o pantă mult mai mare pentru o bună scurgere a apelor decât tabla. Fiind o parte componentă a clădirii, acoperişul trebuie să îndeplinească şi anumite condiţii estetice.

Încă de la prima fază a proiectării unui anumit program de arhitectură, trebuie să se tină seama de conturul planului, care dă forma exterioară a acoperişului; aceasta, cu atât mai mult, cu cît forma, culoarea şi învelitoarea acoperişului trebuie să corespundă specificului arhitecturii locale. *Determinarea muchiilor de intersecţie ale feţelor acoperişului constituie o problemă care se poate rezolva cu ajutorul proiecţiei cotate.*

Pentru exemplificare, se consideră cazul acoperişului cu planele înclinate de aceeaşi pantă, recomandat atât din punct de vedere estetic cât şi constructiv; pentru acest caz, determinarea în planul cotat a muchiilor rezultate din intersecţiile planelor se face cu uşurinţă. Dreapta de intersecţie a două plane de aceeaşi pantă faţă de planul orizontal se proiectează ortogonal pe planul ***H*** după bisectoarea unghiului format de urmele orizontale ale celor două plane. Într-adevăr, pentru a afla dreapta de intersecţie a două plane este suficient să se unească punctele de intersecţie a două perechi de orizontale de aceeaşi cotă din ambele plane. În figura 10.1, făcând această operaţie pentru două plane ***P*** şi ***Q*** de aceeaşi pantă (scările de pantă au intervale egale), se obţine în planul cotat rombul ***acbd***, format prin întretăierea celor două perechi de orizontale de aceeaşi cotă, în care dreapta ***ab*** este diagonala, deci bisectoarea unghiului ***cad***.

Înainte de a trece la studierea procedeului care conduce la determinarea muchiilor de intersecţie a versantilor acoperişului, se arătă care sunt cazurile care se pot prezenta.

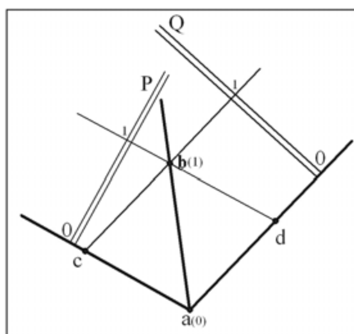


Fig.10.1.Dreapta AB de intersecţie.

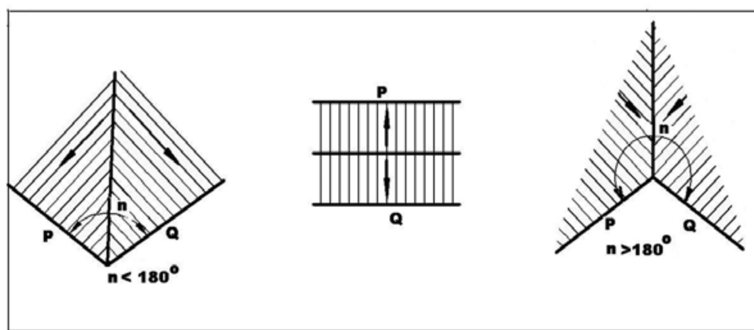


Fig. 10.2.a.b.c. Creastă, coamă, dolie.

Muchiile acoperişului se împart în trei categorii în funcţie de mărimea unghiului format de urmele ***P*** şi ***Q*** ale celor două plane pe planul de nivel superior al cornişei, astfel:

- Dacă ***P*** şi ***Q*** formează un unghi mai mic decât 180°, dreapta lor de intersecţie denumită ***creastă,*** va fi ieşindă faţă de acoperiş, dând posibilitatea apelor de ploaie să se depărteze de ea spre jgheaburi (figura 10.2.a).

- În cazul când urmele celor două plane concurente sunt paralele, dreapta de intersecție va fi o paralelă la urmele planelor, deci va avea poziția orizontală. Muchia va căpăta denumirea de ***coamă*** (figura 10.2.b). Prin ***coamă oblică*** se înțelege muchia limitată de două vârfuri ale acoperişului.
- Când unghiul format de ***P*** şi ***Q*** este mai mare decât 180°, muchia de intersecție a apelor este intrândă iar apele de ploaie se vor strânge de-a lungul ei. Muchia se numeşte în acest caz ***dolie*** (figura 10.2.c).

Pentru trasarea elementelor acoperişului (creste, coame şi dolii) când se dau conturul acestuia şi pantele versanților se va indica, un procedeu care se poate aplica în orice condiții de acoperire (pante egale sau diferite, denivelări, mansarde etc).

10.2. Urmărirea elementelor acoperişului

Acoperişul poate fi considerat ca un poliedru compus dintr-un număr de plane înclinate, corespunzătoare laturilor poligonului de bază (conturul cornişei), grupate cel puțin câte trei în jurul unui vârf al acoperişului.

Există însă şi posibilitatea ca printr-un vârf al acoperişului să treacă mai mult decât trei plane. Astfel, dacă laturile planului unei clădiri sunt toate tangente la acelaşi cerc, acoperişul nu poate avea în plan decât un singur vârf. Acest vârf corespunde în proiecție centrului cercului, pentru că, la planele de aceeaşi pantă muchiile de intersecție se proiectează ortogonal după bisectoarele unghiurilor formate de urmele versanților, şi pentru că bisectoarea interioară a unghiului format de două tangente la un cerc trece prin centrul cercului. Cum poligoanele regulate admit cercuri înscrise, rezultă că toți versanții acoperişului au un punct comun, vârful acoperişului. În cele ce urmează se vor analiza acoperişurile cu poligoane de bază neregulate, acestea fiind cel mai des întâlnite în practică.

10.2.1. Acoperiş cu versanți de pante egale

Se cere de acoperit o clădire având în plan forma din **figura 10.3.a.**
Pentru a urmări cu uşurință grupările de plane se notează versanții acoperişurilor cu litere, **muchiile cu cifre arabe, iar vârfurile cu cifre romane.**

Se duc întâi toate bisectoarele interioare ale unghiurilor poligonului de bază al acoperişului. Urmărirea se face plecând de la o muchie. Fie ***I*** creasta care separă apele ***a*** şi ***b***. Pentru a determina vârful prin care trece, se prelungeşte această muchie până intersectează într-un punct real prima bisectoare din apropierea ei, care nu poate fi decât dreapta de intersecție a uneia din apele ***a*** sau ***b*** cu un al treilea plan. În exemplul luat această primă bisectoare este dată de intersecția versantului ***a*** cu ***j***.

Deci, bisectoarea ***1*** întâlneşte întâi bisectoarea ***2*** (figura 10.3.a) a unghiului format de laturile ***a, j.*** Cum dreapta ***1*** aparține fețelor ***a*** şi ***b*** iar dreapta ***2*** fețelor ***a*** şi ***j***, rezultă că vârful ***I,*** punctul de intersecție al dreptelor ***1*** şi ***2***, aparține fețelor ***a, b*** şi ***j.*** Din cei trei versanți ***a, b*** şi ***j*** a mai rămas de intersectat fața ***j*** cu fața ***b***, rezultând a treia muchie ***3***, de data aceasta o coamă, a vârfului ***I***. Deoarece muchia ***3*** nu închide acoperişul, adică nu întâlneşte jgheabul, ea trebuie să fie limitată de un alt vârf al acoperişului ce se obține urmărind acelaşi raționament.

Muchia ***3*** (intersecția versanților ***b*** şi ***j***) întâlnind întâi muchia ***4***, determină în acest punct vârful ***II*** care grupează apele ***b, j*** şi ***c***. A treia muchie ce trece prin acest vârf este deci intersecția apei ***c*** cu ***j***. Vârful unghiului ***c, j*** obținându-se prin prelungirile laturilor ***c*** şi ***j***, bisectoarea acestui unghi este reală numai pe o anumită porțiune, şi anume segmentul limitat de vârful ***II*** până la intersecția lui cu prima bisectoare dinspre vârful unghiului, rezultând vârful ***III*** din intersecțiile muchiilor ***5*** şi ***6***.

Dolia ***6*** aduce versantul ***i*** ce urmează a fi intersectat cu versantul ***c***. Din intersecția acestor versanți rezultă a treia muchie a vârfului ***III***, coama ***7***. Se observă că vârful ***IV*** se obține la intersecția coamei ***7*** cu dolia ***8***, care aduce versantul ***d***. Vârful ***IV*** grupează planele ***c, d*** şi ***i***. A treia muchie ***9*** a acestui vârf corespunde bisectoarei unghiului format de laturile ***i*** şi ***d***, al cărui vârf este dat de prelungirile acestor laturi. Coama oblică ***9*** apare deci reală de la vârful ***IV*** până la vârful ***V***, obținut prin intersecția muchiei ***9*** cu creasta ***10***.

Urmărind grupările de versanți rezultă în ordine vârfurile ***VI, VII*** şi ***VIII***, creasta ***17*** închizând acoperişul.

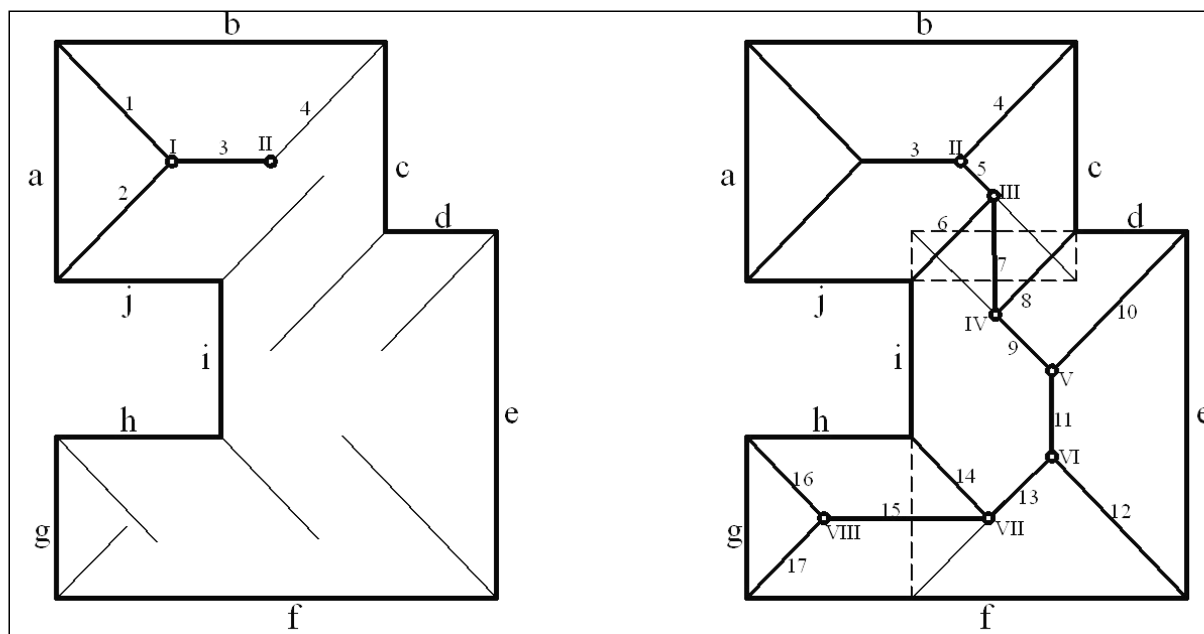


Fig.10.3. Acoperiş cu pante egale.

Observație:

Se poate întâmpla ca, dintr-un vârf al acoperişului, să intervină două sensuri de urmărire. Acest lucru depinde de forma planului clădirii. La acoperişul din figura 10.4 se observă că indiferent din ce parte a clădirii se face urmărirea, intervine o bifurcare, după cum rezultă din schemele figurii, în acest caz nu se schimbă nimic din procedeul indicat.

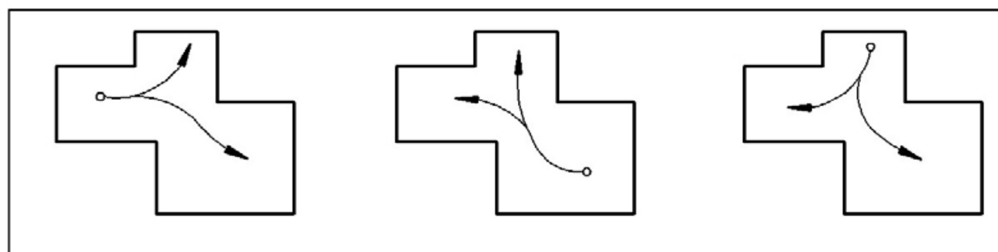


Fig. 10.4.Traseu de urmărire cu bifurcare.

În cazul când acoperişul nu prezintă bifurcare, prima muchie pe care o va întâlni muchia urmărită pentru a determina un nou vârf al acoperişului, rezultă din desen, şi va fi una din bisectoarele unghiurilor poligonului de acoperit, în cazul bifurcării acoperişului, punctul de bifurcare se obține uşor dacă elementele acoperişului sunt urmărite din două părți ale conturului de naştere al acoperişului.

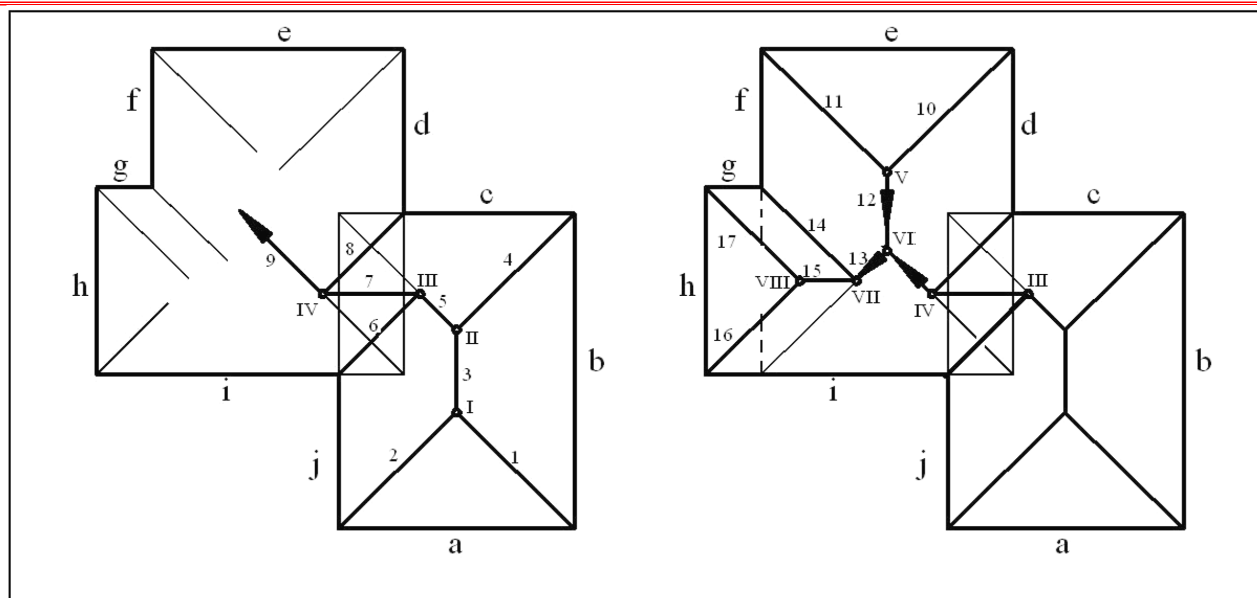


Fig.10.5. Acoperiş cu pante egale la clădiri alăturate.

Într-adevăr, la acoperişul din ***figura 10.5,*** urmărind grupările de versanţi cu începere de la muchia ***1***, intersecţia versanţilor ***a*** şi ***b,*** şi ajungând la muchia ***9*** rezultată din intersecţia versanţilor ***d*** şi ***i*** nu a intervenit nici o bifurcare. Vârful următor pe muchia ***9*** va fi un punct de bifurcare şi va rezulta din intersecţia muchiei urmărite cu o coamă, deci nu cu una din muchiile trasate ca bisectoare ale unghiurilor poligonului de acoperit.

Pentru obţinerea vârfului de bifurcare se vor urmări elementele acoperişului plecând din două părţi ale poligonului de acoperit.

În exemplul luat, figura 10.5, se vor urmări elementele acoperişului şi de la muchia ***10*** rezultată din intersecţia versantilor ***d*** şi ***e.*** Prelungind muchia ***10***, aceasta întâlneşte prima dată muchia ***11*** în vârful ***V***, în jurul căruia sunt grupaţi versanţii ***d, e*** şi ***f.***

Din intersecţia versantilor ***f*** şi ***d*** se obţine coama orizontală ***12***, care întîlneşte coama oblică ***9*** în punctul de bifurcare ***VI.*** Cum muchia ***9*** este intersecţia versanţilor ***i*** şi ***d***, iar muchia ***12*** a versantilor ***f*** şi ***d*** rezultă că a treia muchie a vârfului ***VI*** este intersecţia versantilor ***i*** şi ***g***, dând muchia ***13***. Muchia ***13*** se intersectează cu muchia ***14*** în vârful ***VII*** ce grupează versanţii ***i, f*** şi ***g***.

Din intersecţia versantilor ***g*** şi ***i*** se obţine coama orizontală ***15*** care întâlneşte în acelaşi vârf ***VIII*** crestele ***16*** şi ***17***, acoperişul închizându-se.

10.2.2. Acoperişuri cu versanţi de pante diferite

Se cere de acoperit planul din ***figura 10.6*** cu versanţii ***a, b, c*** şi ***d***, care fac unghiuri de ***30°*** cu planul orizontal şi ***e, f, g*** şi ***h***, care fac unghiuri de ***45°*** cu planul orizontal.

Pentru a determina proiecţiile orizontale ale muchiilor acoperişului ce pornesc din vârfurile poligonului de bază, se secţionează cu un plan de nivel de cotă ***z*** versanţii acoperişului.

Pentru determinarea poziţiilor în plan a orizontalelor de secţiune sunt necesare distanţele orizontale ***A-30°*** şi ***A-45°*** corespunzând cotei ***z*** şi pantelor celor doi versanţi. Acestea se obţin cu ajutorul triunghiurilor de pantă din figură, care s-au construit cu una din catete având valoarea cotei ***z***, iar ipotenuza reprezentând linia de cea mai mare pantă a versantilor, cu înclinarea faţă de planul orizontal de ***30°*** respectiv ***45°.***

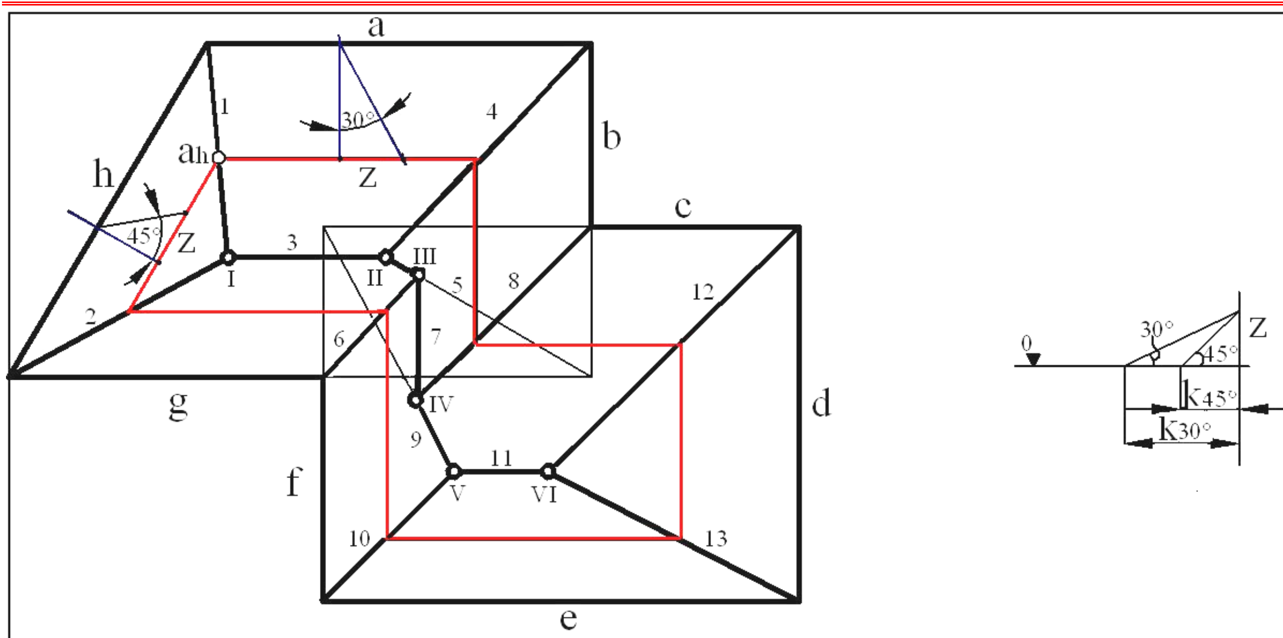


Fig. 10.6.Acoperiş cu pante diferite.

Orizontala versantului ***a*** intersectează orizontala versantului ***h*** de aceeaşi cotă ***z*** într-un punct ***ah***. Punctul ***ah***, unit cu vârful unghiului format de laturile ***a*** şi ***h***, dă muchia de intersecție a acestor doi versanți care, se vede că nu se mai proiectează după bisectoarea unghiului ***ah***.

Procedând în mod similar, se determină toate crestele şi doliile acoperişului, după care urmărirea elementelor acoperişului se face ca în cazurile precedente.

10.2.3. Acoperişuri denivelate cu versanții cu pante egale

Fie acoperişurile din ***figura 10.7.a.b*** cu contururile orizontale respectiv: ***abcd*** în planul ***H1***, ***mnop*** în ***H2*** şi ***rst*** în ***H3***, denivelările planelor de naştere a fiecăruia din ele arătate pe elevația alăturată planului.

Pentru rezolvarea problemei se porneşte de la un acoperiş fără denivelări derivând din acoperişurile date. Acesta se obține luând ca plan de naştere comun pentru toate acoperişurile componente, planul de naştere al acoperişului cu *cota cea mai mică* ***H1*** şi prelungind acoperişurile superioare până la planul comun pentru determinarea urmelor acestora.

Astfel, dacă se prelungesc versanții ***r, s*** şi ***t*** ai acoperişului cu planul de naştere ***H3*** până la planul ***H1***, se obțin urmele lor respective ***i, j*** şi ***k***. Urmele versantilor ***r*** şi ***t*** rezultă prin rabaterile punctelor γ şi δ pe latura ***c*** în C_γ şi C_δ γ şi δ fiind punctele de intersecție ale jgheaburilor ***r*** şi ***t*** cu versantul ***c***. Urmele ***e*** şi ***h*** pe planul ***H1*** ale versantilor ***m*** şi ***p*** se află cu ajutorul punctelor d_α şi a_β .

Baza comună este ***i, j, k, c, d, e, f, g, h, a, b*** şi ***c***, căreia îi corespunde acoperişul din figura 10.7.a, construit prin urmărirea grupărilor de plane.

Rezultă că:
- doliile ***10*** şi ***15*** sunt reale până la nivelul ***H3***, de asemenea şi crestele ***20*** şi ***21***;
- doliile ***4*** şi***12*** sunt reale până la planul ***H2*** respectiv în α şi β, şi crestele ***1, 2*** şi ***8***.

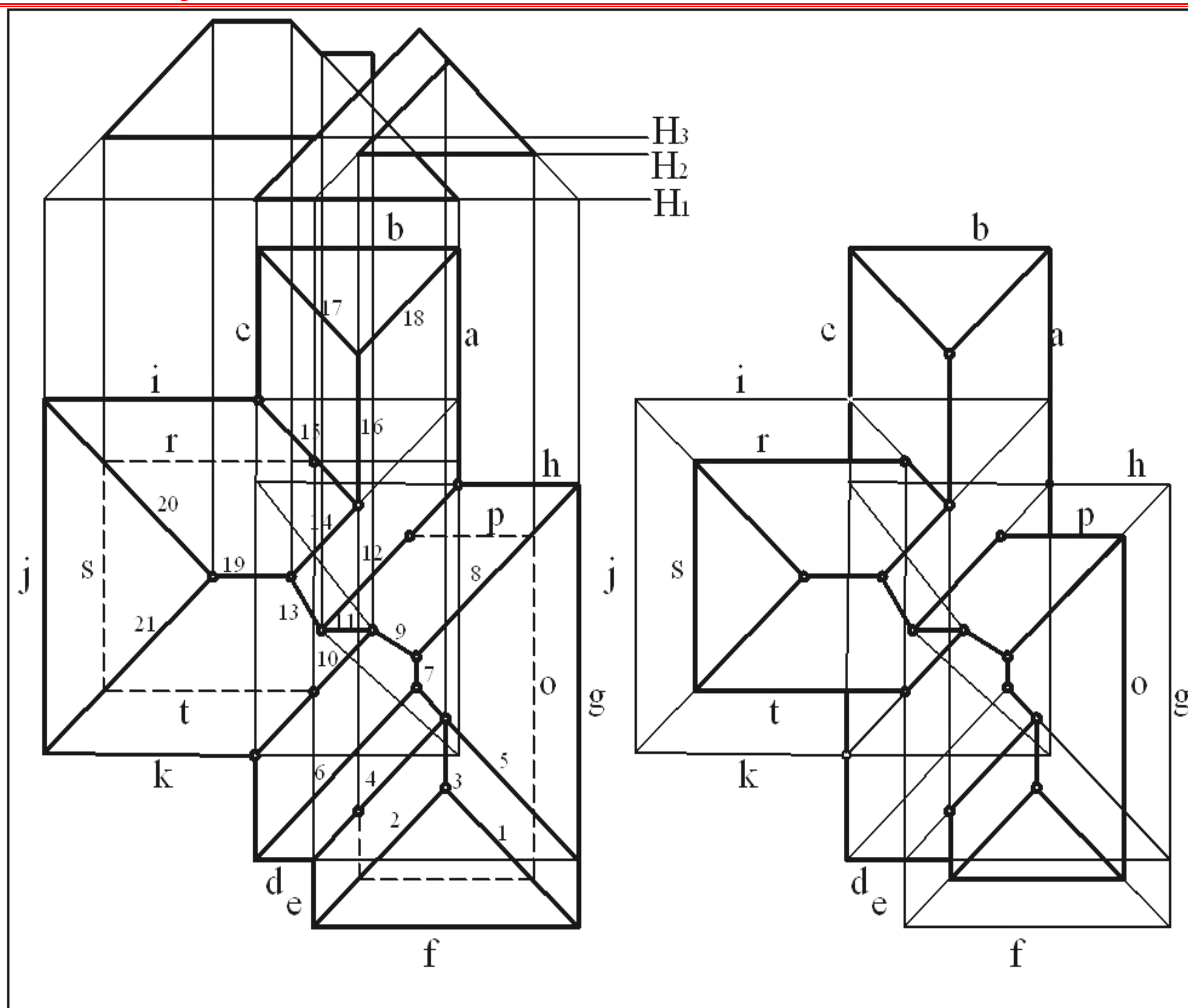


Fig.10.7.a.b. Acoperişuri denivelate:

11. PERSPECTIVA GEOMETRICĂ

11.1. Generalităţi

Perspectiva stabileşte regulile şi metodele cu ajutorul cărora se pot reprezenta obiectele din spaţiu pe un plan, printr-o singura imagine, aşa cum se văd.

Pentru ca această reprezentare plană să corespundă imaginii pe care o realizează ochiul omenesc când priveşte acelaşi obiect sau ansamblu trebuie respectate, pe de o parte, relaţiile de poziţie şi relaţiile metrice ce caracterizează obiectele din punct de vedere geometric, iar pe de altă parte, să se ţină seama de legile vederii, strâns legate de constituţia ochiului.

În perspectivă se utilizează următoarele **notaţii**:
- centrul de proiecţie, care corespunde, centrului optic, se numeşte centru de vedere şi se notează cu ***V***;
- tabloul plan, în care imaginea apare dreaptă, se numeşte tablou de perspectivă şi se notează cu ***T***;
- axa optică, care trebuie să fie îndreptată spre centrul geometric al obiectului, perpendiculară pe tabloul de perspectivă, are denumirea de rază principală de privire, ***r.***

11.1.1. Condiţiile unei bune perspective

Se ştie că ochiul omenesc nu înregistrează decât imaginile corpurilor cuprinse într-o porţiune de spaţiu limitată de un con eliptic cu vârful în centrul optic al ochiului.
Acest con vizual se caracterizează prin două unghiuri: unul făcut de cele două generatoare din planul axial orizontal de vedere al ochilor, numit *unghi de vedere orizontal*, şi celălalt făcut de cele două generatoare ce aparţin planului axial perpendicular pe cel orizontal, numit *unghi vizual vertical.*

Ştiind că un obiect poate fi văzut dintr-o singură privire numai când observatorul priveşte către el, adică axa optică este îndreptată către centrul geometric al obiectului, rezultă că proiecţia conică a unui obiect pe un plan poate fi aproximată cu imaginea sa vizuală, numai dacă pe lângă executarea riguroasă a imaginii plane sunt respectate şi cele *trei condiţii ce rezultă din proprietăţile fiziologice ale ochiului omenesc:*

- direcţia principală de privire să treacă prin centrul geometric al obiectului; este deci o direcţie determinată de centrul de vedere V şi centrul geometric G al obiectului;

- tabloul de perspectivă să fie totdeauna perpendicular pe direcţia principală de privire;

- unghiul orizontal de vedere să fie cuprins între 30 şi 45°, iar cel vertical în jurul lui 28°; aceste valori corespund formării imaginii naturale.

Numai când obiectul are lungimea foarte mare în raport cu înălţimea, se foloseşte unghiul orizontal de ***45°.***

Practic, *conul de vedere eliptic* poate fi înlocuit, cu *o piramida* de vedere dreaptă care are ca bază, în tabloul de perspectivă un dreptunghi ***ABCE*** cu laturile: 2/3 ***D*** şi 1/2 ***D***; ***D*** fiind distanţa de la centrul de vedere la tablou, (fig.11.1).

Imaginea perspectivă a unui obiect apare deformată dacă depăşeşte conturul acestui dreptunghi limită.

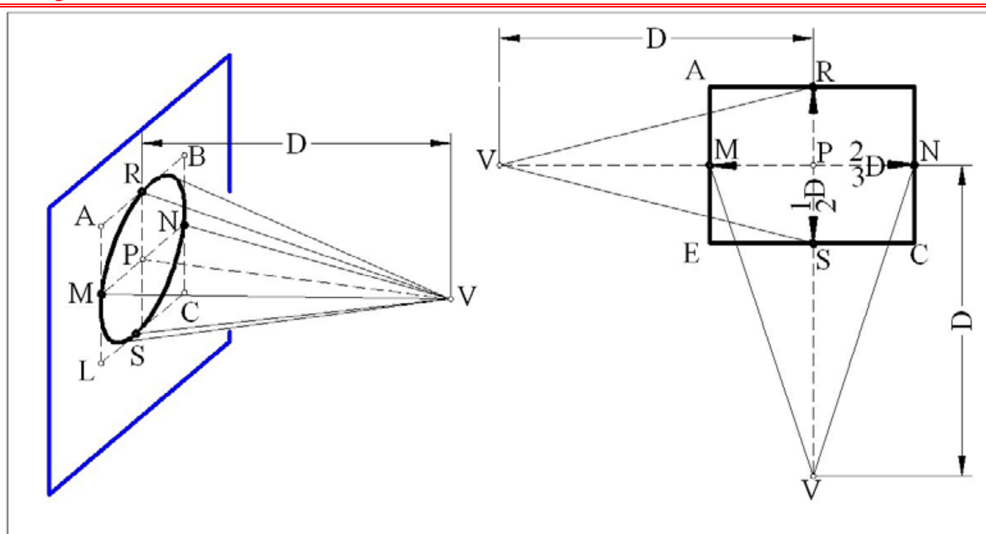


Fig.11.1. Conul de vedere eliptic şi piramida de înălţime D

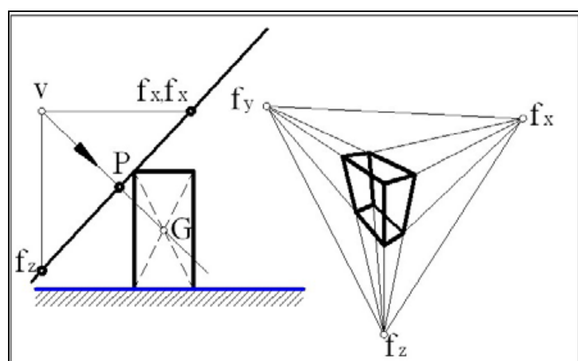
11.1.2. Clasificarea perspectivelor după direcţia principală de privire

Pentru a construi corect imaginea perspectivă plană a unui obiect din spaţiu trebuie ca centrul de vedere, obiectul şi tabloul de perspectivă să fie raportate la un **sistem de referinţă**.

În perspectivă, acest sistem de referinţă este format din două plane: unul ce se consideră orizontal, iar celălalt vertical, deci perpendicular pe primul, ca în dubla proiecţie ortogonală.

În funcţie de poziţia pe care o are raza principală de privire, deci şi poziţia tabloului de perspectivă, faţă de planul orizontal de referinţă pe care se consideră aşezate obiectele, se deosebesc trei cazuri de perspectivă:

- **perspectiva descendentă**, în care observatorul se află mult deasupra obiectului şi deci raza principală de privire este înclinată faţă de planul orizontal şi coboară spre obiect; în acest caz tabloul este înclinat iar verticalele apar în perspectivă concurente într-un punct ***fz*** sub imaginea clădirii;



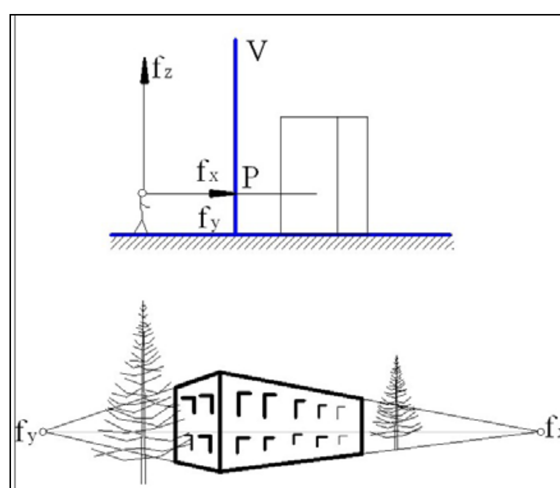


Fig. 11.2. Perspectiva descendentă *Fig. 11.3. Perspectiva orizontală*

- **perspectiva orizontală**, în care raza principală de privire este orizontală, iar tabloul de perspectivă se ia vertical; perspectivele dreptelor verticale apar tot verticale, deci paralele între ele;

- perspectiva ascendentă, în care centrul de vedere se află mult sub planul orizontal inferior al obiectului, deci raza principală de privire este înclinată față de planul orizontal şi urcă spre obiect ; tabloul de perspectivă se ia înclinat față de ***H,*** iar verticalele în perspectivă apar concurente într-un punct ***fz*** situat deasupra imaginii obiectului.
(Se va analiza în continuare doar perspectiva orizontală, fiind cea mai des utilizată în practică).

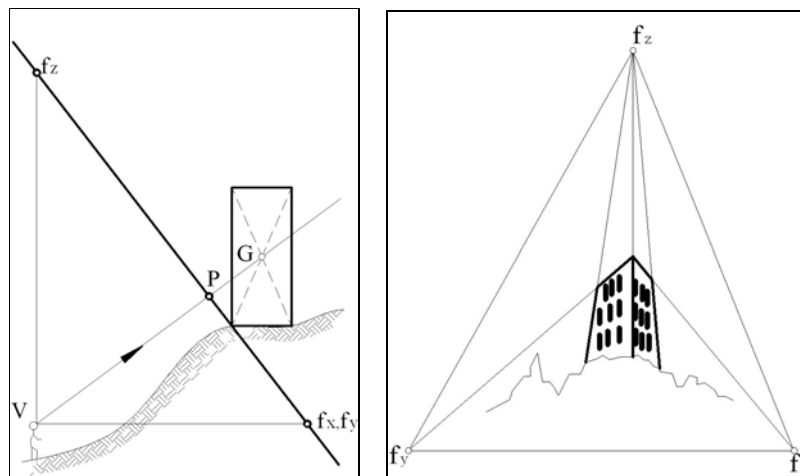


Fig. 11.4. Perspectiva ascendentă.

11.1.3. Elementele sistemului perspectiv de reprezentare

Din analiza fenomenului fizic al percepției vizuale rezultă că elementele de bază ale sistemului perspectiv sunt: centrul de vedere, obiectul şi tabloul de perspectivă, precum şi sistemul de referință față de care se fixează aceste elemente pentru a se obține construcții grafice riguroase. Sistemul de referință utilizat este cel al dublei proiecții ortogonale, alcătuit din două plane: plan orizontal de proiecție sau geometral şi planul vertical de proiecție.

Să presupunem că tabloul perspectiv coincide cu planul vertical de proiecție.

Intersecția tabloului de perspectivă cu geometrului se numeşte *baza tabloului sau linia pământului* şi se notează cu ***x-x*** (figura11.5); ea determină poziția tabloului în sistemul de referință. *Centrul de vedere* este determinat prin proiecțiile lui ortogonale ***v*** şi ***v'*** pe geometral, respectiv pe planul vertical de proiecție.

Perpendiculara pe tabloul de perspectivă dusă prin centrul de vedere este *raza principală de privire;* aceasta intersectează tabloul de perspectivă în punctul ***P***, numit punct principal. Distanța ***PPx*** este egală cu cota ***V v*** a centrului de vedere. Distanța ***VP*** se numeşte *distanță principală;* ea corespunde distanței de la centrul de vedere la tabloul de perspectivă şi apare în adevărată mărime în geometral după segmentul ***vPx***.

Planul care trece prin centrul de vedere ***V*** şi este paralel cu geometralul se numeşte *planul orizontului.* În acest plan se găsesc: raza principală de privire şi laturile unghiului vizual orizontal. Dreapta de intersecție a planului orizontal cu tabloul de perspectivă ia denumirea de *linia orizontului* şi se notează cu ***h-h.*** Ea este paralelă cu ***x-x*** la o distanță de aceasta egală cu cota centrului de vedere.

Planul care trece prin centrul de vedere şi este perpendicular atât pe geometral cât şi pe tabloul de perspectivă se numeşte *plan vertical principal*, în el se găsesc atât raza principală de privire cât şi laturile unghiului vizual vertical.

Planul care trece prin centrul de vedere şi este paralel cu tabloul de perspectivă se numeşte *planul neutru.*

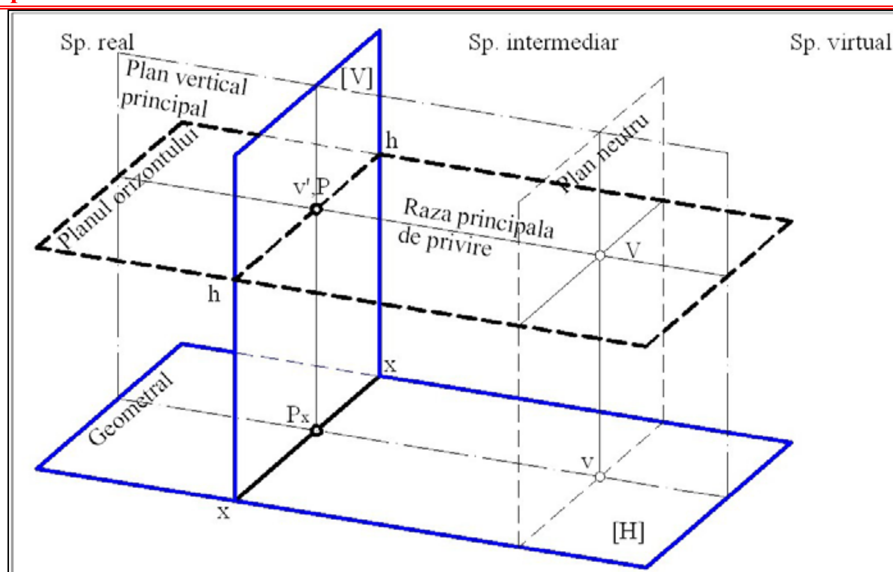


Fig. 11.5. Elementele sistemului de perspectivă.

Spaţiul este împărţit de tabloul de perspectivă şi de planul neutru în trei părţi:
- partea din spatele tabloului este *spaţiul real;*
- partea cuprinsă între tabloul de perspectivă şi planul neutru este *spaţiul intermediar*;
- partea opusă spaţiului intermediar faţă de planul neutru şi care ar corespunde porţiunii din spatele observatorului este *spaţiul virtual*.

Pentru a construi perspectiva unui obiect nu este suficient ca obiectul respectiv să fie perfect definit geometric (dimensiuni şi relaţii de poziţie ce rezultă din reprezentarea lui în dubla proiecţie ortogonală), ci trebuie să fie precizate în epură atât poziţia tabloului cât şi cea a centrului de vedere faţă de obiect.

Ştiind că perspectiva orizontală este o proiecţie conică pe un tablou vertical şi că totul se reduce la intersecţia unui fascicul de drepte concurente cu tabloul de perspectivă, este clar că orice problemă de perspectivă poate fi rezolvată prin procedeele cunoscute ale geometriei descriptive, direct pe epura respectivă.

Sunt cunoscute în această privinţă, încă din epoca Renaşterii, metodele lui Leonardo da Vinci şi Bruneleschi. În prima se foloseşte ca tablou de perspectivă chiar planul vertical de proiecţie, în cea de-a dona, un plan vertical oarecare, de cele mai multe ori un plan de profil.

Pentru exemplificare, se arată cum se construieşte perspectiva unui punct cu ajutorul metodei Leonardo da Vinci.

11.1.4. Metoda lui Leonardo da Vinci

Se dă un punct ***a, a'*** şi centrul de vedere ***v, v'*** (figura11.6.). Tabloul este identic cu planul vertical de proiecţie deci baza ***x-x*** a tabloului coincide cu ***o-x***.

Perspectiva punctului ***A*** se obţine intersectând raza vizuală ***VA*** cu tabloul, deci se determină urma verticală a razei vizuale.

Rezolvare: Se prelungeşte proiectia orizontală a razei vizuale ***va*** până întâlneşte baza ***x-x*** a tabloului în punctul a^0_x . Perpendiculara a^0_x pe ***x-x*** intersectează proiecţia verticală ***v'a'*** a razei vizuale, în punctul A_0 , perspectiva punctului ***A*** din spaţiu.

În perspectivă, ca şi în axonometrie, se alege ca imagine secundară, necesară pentru determinarea obiectului, imaginea perspectivă a proiecţiei orizontale a punctului. Perspectiva proiecţiei orizontale fiind urma pe tablou a razei vizuale ***va***, $v'a_x$, ea se obţine în punctul a_0 la intersecţia cu $v'a_x$, a perpendicularei pe ***x-x*** dusă prin a^0_x.

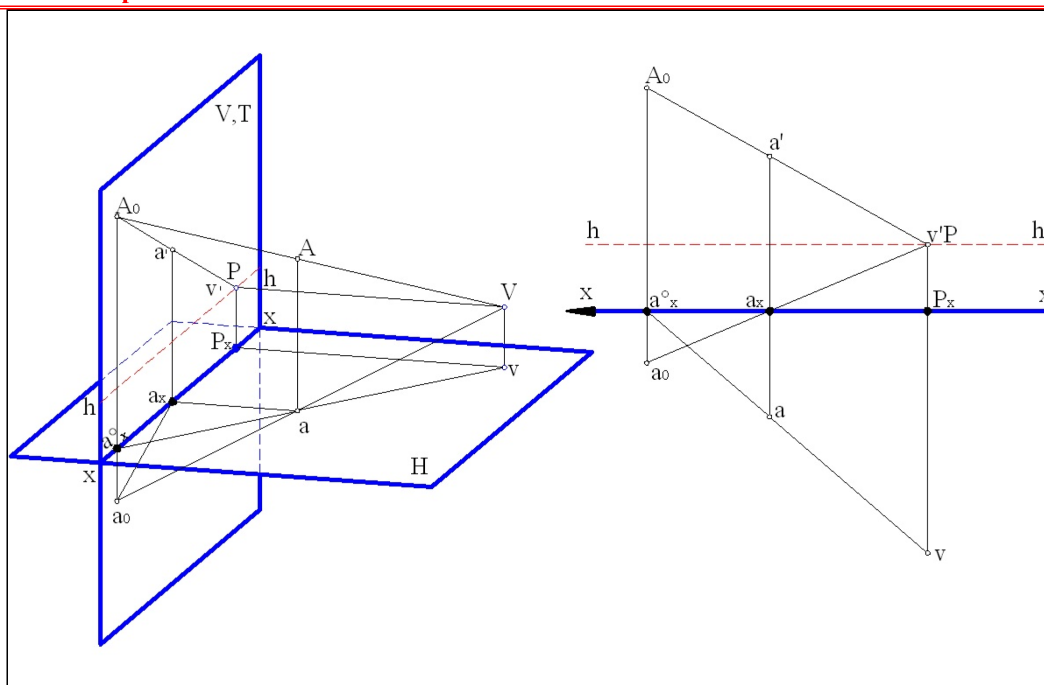


Fig. 11.6. Perspectiva punctului A.

În acest fel perspectiva unui punct se defineşte geometric ca intersecția razei vizuale cu tabloul de perspectivă.

În perspectiva geometrică modernă se utilizează ca tablou de perspectivă un plan vertical oarecare, diferit de planul vertical de proiecție, iar pentru realizarea perspectivei, metode grafice specifice perspectivei geometrice care conduc la construcții grafice simple şi rapide.

11.1.5. Pregătirea geometralului

Construcția unei perspective trebuie să fie precedată de o serie de construcții grafice în geometral, şi anume: fixarea centrului de vedere ***v*** şi a poziției tabloului (baza ***x-x)*** față de obiectul dat în dubla proiecție ortogonală, astfel ca imaginea să fie cât mai naturală.

În exemplul ce urmează se va arăta practic în ce constă pregătirea geo-metralului pentru a pune în perspectivă o clădire.

Fie, în figura 11.7, o clădire reprezentată în dubla proiecție ortogonală, cu fețele verticale din ***af*** şi ***gb*** paralele cu planul vertical de proiecție.

Operațiile ce trebuie executate în geometral, pentru a asigura o imagine perspectivă cât mai apropiată de cea naturală sunt:

1) *Se consideră „planul" clădirii încadrat în dreptunghiul* **abcd** *şi se determină întâi zona de vizibilitate.*

Prin zona de vizibilitate se înțelege totalitatea punctelor din geometral din care, privind spre obiect, se văd aceleaşi laturi ale „planului" clădirii, respectiv fețe verticale. Pentru a vedea, spre exemplu, fețele verticale ***af*** şi ***gb***, observatorul trebuie să se situeze numai în fața dreptei ***ab*** obținută prin prelungirea, segmentelor ***af*** şi ***gb***. De asemenea, observatorul va vedea fața laterală ***ad*** dacă el este situat la stânga dreptei ***ad*** obținută prin prelungirea segmentului ***ad***.

Rezultă că din orice punct ***v*** luat în interiorul unghiului drept ***man***, clădirea va apărea în perspectivă cu fețele verticale ***af, gb*** şi ***ad*** vizibile. De cele mai multe ori, alegerea centrului de vedere ***v*** poate fi condiționată şi de alți factori. În cazul de față, dacă se

doreşte ca pe fața verticală ***ih*** corpul de clădire ***daf***, să apară suprapus în perspectivă numai pe porțiunea ***ik,*** atunci centrul ***v*** trebuie luat pe raza vizuală ***fk***, dar numai în zona de vizibilitate.

*2) Se alege apoi punctul **v** pe raza vizuală **fk** sau în zona de vizibilitate*, ținând seama de câmpurile vizuale, în general de câmpul vizual orizontal, întrucât cel vertical se ia în considerare numai când clădirea prezintă înălțimi mari față de lungimea ei.

Practic, pentru fixarea centrului ***v***, astfel încât să fie respectată condiția legată de unghiul vizual ***dvb*** în care trebuie înscris „planul" clădirii, se utilizează un calc pe care este trasat unghiul vizual ales, cuprins între 30° şi 45°. Se suprapune calcul peste „planul" clădirii cu grija ca laturile unghiului să treacă prin ***d*** respectiv ***b***, iar vârful lui să fie pe raza vizuală ***fk***, după care, prin înțeparea calcului cu un ac în dreptul vârfului unghiului, se obține centrul de vedere ***v.***

3) Se *uneşte centrul de vedere **v,** cu punctul **G**, centrul geometric al planului clădirii şi se obține raza principală de privire **vG**.*

Aceasta corespunde axului optic, ce asigură orientarea privirii către obiect şi condiționează poziția tabloului de perspectivă.

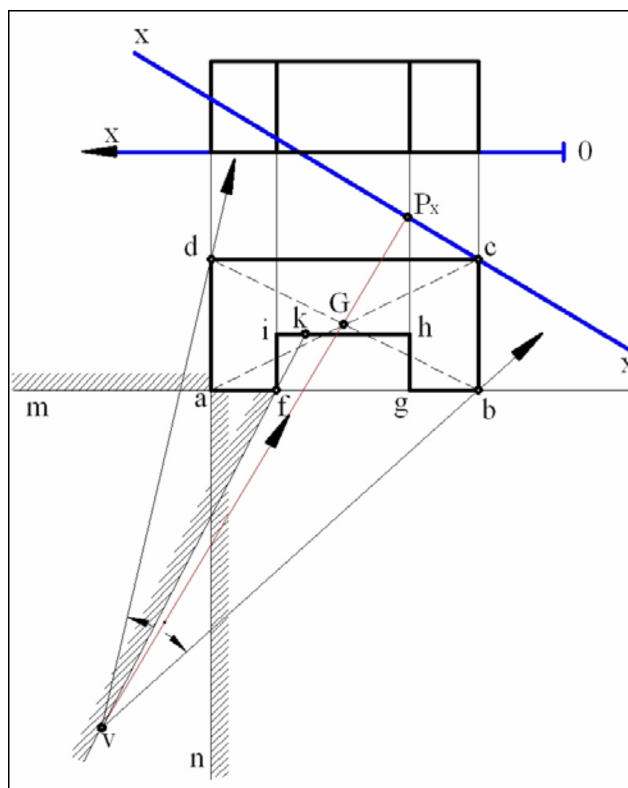


Fig. 11.7. Pregătirea geometralului

4) *Se trasează linia **x-x** (baza tabloului care determină poziția lui), perpendiculară pe raza principală de privire **vG**,* mai departe sau mai aproape de ***v***, după cum se urmăreşte ca imaginea perspectivă să apară mai mare sau mai mică decât dimensiunea reală a clădirii la scara respectivă. În mod obişnuit tabloul se ia astfel ca el să conțină, fie cea mai depărtată muchie verticală de ***v,*** şi atunci clădirea se găseşte în spațiul intermediar iar imaginea perspectivă va fi mai mare, fie prin muchia verticală cea mai apropiată, şi atunci clădirea se va găsi în spațiul real şi deci imaginea perspectivă va apărea mai mică.

11.2. Perspectiva punctului

Problema reprezentării perspectivei punctului a fost expusă în cadrul metodei lui Leonardo da Vinci. Mai trebuie specificat doar poziţiile pe care le poate avea punctul în cele trei părţi ale spaţiului determinate de tabloul de perspectivă şi de planul neutru. Întrucât aceste poziţii sunt strâns legate de poziţiile pe care le au proiecţiile orizontale respective, în perspectivă este suficient să se urmărească perspectiva proiecţiei orizontale a punctului.

Fie, în figura 11.8, planul ***H*** geometralul şi ***T*** tabloul de perspectivă, ambele văzute din profil pentru a uşura înţelegerea problemei.

Fie punctul ***A, a*** din spaţiul real; perspectiva lui ***a*** se va găsi la intersecţia razei vizuale ***Va*** cu ***T***, în punctul a_0 situat totdeauna între baza ***x-x*** a tabloului şi linia orizontului. Deci, orice punct din tabloul de perspectivă (figura 11.9), cu imaginea perspectivă a proiecţiei orizontale situată între linia de pământ ***x-x*** şi linia orizontului ***h-h***, corespunde unui punct din spaţiul real; este cazul punctului A_0a_0 corespunzător punctului ***A,a*** din spaţiu.

Pentru un alt punct ***B,b*** situat în tabloul de perspectivă, atât proiecţia orizontală ***b*** cât şi perspectiva ei b_0 coincid într-un punct pe linia de pământ (figurile 11.8. şi 11.9.).

Dacă un punct ***C,c*** se găseşte în spaţiul intermediar, proiecţia orizontală ***c*** cade între baza tabloului şi baza planului neutru. Perspectiva lui ***c*** este punctul c_0 situat totdeauna sub baza ***x-x*** a tabloului, deoarece raza vizuală ***Vc*** intersectează tabloul numai sub ***x-x***.

Punctul ***E,e*** din planul neutru va avea perspectiva atât a punctului din spaţiu cât şi a proiecţiei orizontale la infinit, întrucât razele vizuale aparţin planului neutru, paralel cu tabloul de perspectivă.

Punctul ***G,g*** din spaţiul virtual apare în perspectivă cu g_0 deasupra liniei orizontului, iar G_0 situat sub g_0, când ***G*** se găseşte deasupra geometralului.
Se observă că segmentul vertical ***Gg*** apare răsturnat în perspectivă, centrul de vedere ***V, v*** găsindu-se între obiect şi tablou.

Dacă punctul este la infinit, perspectiva lui apare în tablou la distanţă finită, cu proiecţia orizontală pe linia orizontului. Dacă presupunem că punctul ***A,a*** se depărtează către infinit, la limită, raza vizuală ***Va*** va fi conţinută în planul orizontului şi va intersecta tabloul într-un punct pe linia orizontului ce se notează cu ***f***.

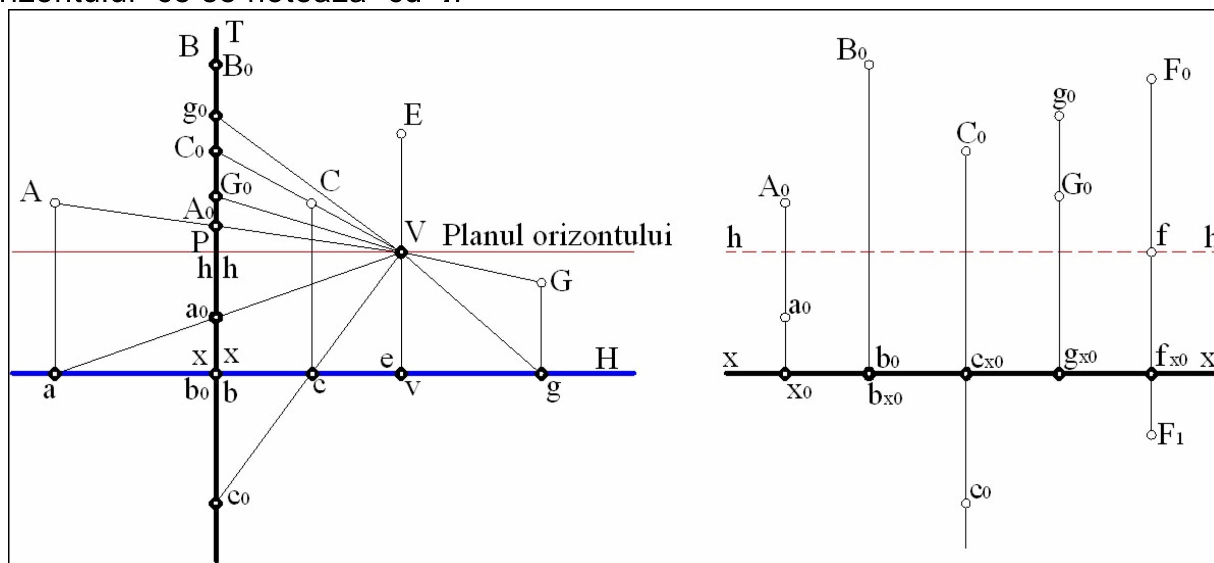


Fig. 11.8. Perspectiva punctelor-tablou; ***Fig. 11.9. Perspectiva punctelor-epura.***

11.3. Perspectiva dreptelor

Se ştie că proiecția conică pe un plan oarecare a unei drepte din spațiu este tot o dreaptă. Deci pentru a se obține proiecția conică a dreptei este suficient să se construiască proiecțiile conice a două puncte de pe ea. În perspectivă se utilizează în mod curent două puncte particulare ale dreptei:

Unul din puncte se ia *intersecția dreptei cu tabloul de perspectivă* punct ce poartă denumirea de *urmă,* deoarece perspectiva urmei este ea însăşi. În figura 11.10, urma dreptei ***D*** este punctul ***U***.

Al doilea punct se ia *punctul de la infinit al dreptei*. Acest punct corespunde poziției pe care o poate avea un punct ***A*** când se deplasează nelimitat pe dreaptă. În acest caz, unghiul razei vizuale ***VA*** cu ***D*** se micşorează şi la limită devine zero. Rezultă că raza vizuală a punctului de la infinit de pe dreapta ***D*** trece prin ***V*** şi este paralelă cu ***D***. Din intersecția acestei raze vizuale cu tabloul rezulta un punct ***F***. Punctul ***F*** se numeşte *punctul de fugă al dreptei.*

Dreapta ***FU*** este perspectiva dreptei ***D***.

Punctul de fugă este foarte important în perspectivă deoarece dacă se iau două drepte D_1 şi D_2 paralele cu ***D***, aceste drepte au acelaşi punct comun cu ***D*** la infinit, iar perspectiva acestui punct fiind punctul ***F***, rezultă că perspectivele celor trei drepte paralele ***D***, D_1 şi D_2 apar concurente în ***F***. Deci orice dreaptă D_1 sau D_2 paralelă cu ***D*** va avea ca perspectivă o dreaptă ce rezultă din unirea punctului U_1 sau U_2 (urmele dreptelor respective) cu punctul de fugă ***F***.

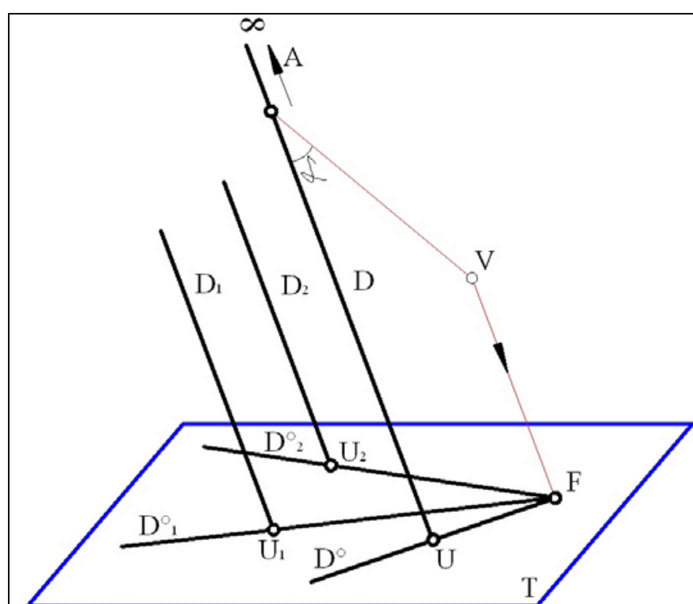


Fig. 11.10.Perspectiva dreptelor

*În concluzie: perspectivele dreptelor paralele din spațiu apar concurente, într-un punct numit **punct de fugă** care se obține proiectând conic, din centrul **V**, punctul de la infinit comun dreptelor paralele.*

În schița şi în epura de perspectivă din figura 11.11, unde s-a considerat planul vertical de proiecție ca tablou de perspectivă, s-a obținut perspectiva unei drepte oarecare ***D***.

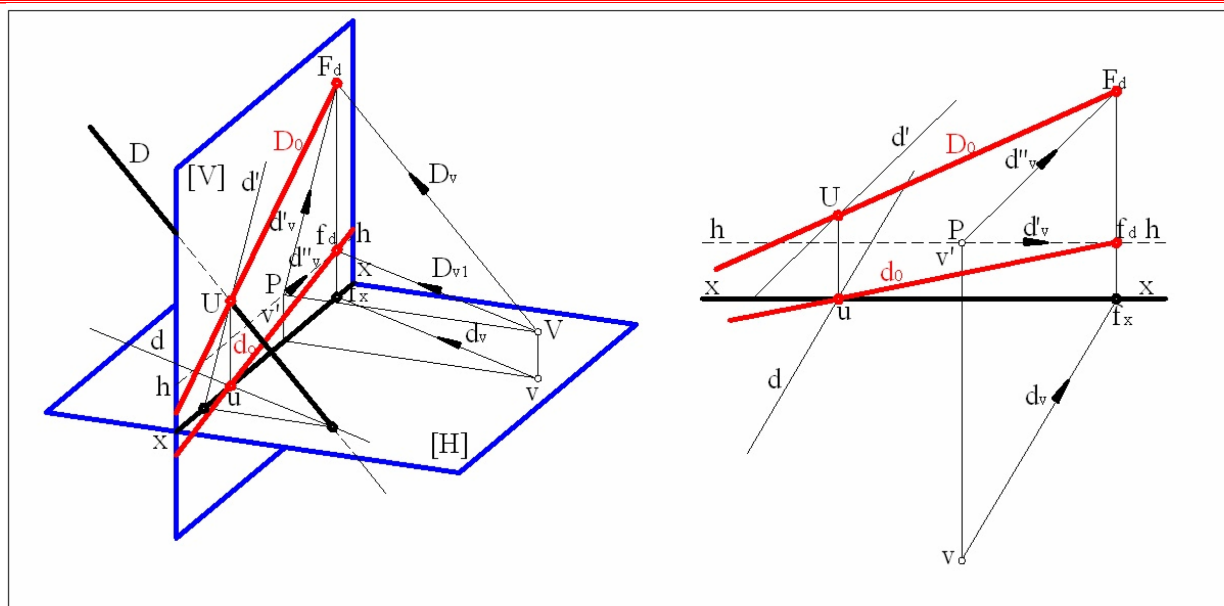


Fig. 11.11. Perspectiva dreptei oarecare D.

Trebuie subliniat că la dreaptă, pentru a se putea citi poziția ei în epura de perspectivă, nu este suficientă numai imaginea perspectivă a dreptei ***D*** din spațiu, ci este necesară şi perspectiva proiecției ei orizontale ***d****.*

Pentru perspectiva dreptei din spațiu s-au folosit urma ei ***U*** pe tablou (determinată ca în dubla proiecție ortogonală cu ajutorul urmei ***u*** a proiecției orizontale ***d*** a dreptei) şi punctul de fugă F_d (punctul de intersecție cu tabloul de perspectivă al razei vizuale d_v, d'_v , dusă prin centrul de vedere ***v,v', P****,* paralelă la ***d, d')****.*

Dreapta D_0 care uneşte pe F_d cu ***U*** este perspectiva dreptei din spațiu.

Pentru perspectiva proiecției orizontale ***d*** a dreptei se procedează la fel ca pentru dreapta din spațiu; se determină urma ***u*** şi punctul de fugă f_d. Punctul de fugă f_d rezultă pe linia orizontului din intersecția cu tabloul de perspectivă a razei vizuale d_v, d'_v duse prin ***v, P*** paralelă la ***d****,* ***x-x.***

Dreapta d_0 care uneşte pe f_d cu ***u*** este perspectiva proiecției orizontale ***d*** a dreptei ***D*** din spațiu.

11.3.1. Perspectiva dreptei de nivel

Perspectiva dreptei de nivel se obține cu ajutorul urmei dreptei pe tablou şi al punctului de fugă (figura 11.12). Dreapta de nivel fiind paralelă cu geometrului, proiecția ei orizontală ***d*** va fi paralelă cu dreapta ***D*** din spațiu şi deci vor avea acelaşi punct de fugă f_d. Punctul f_d rezultă din intersecția cu tabloul, a razei vizuale d_v, d'_v a punctului de la infinit al orizontalei. Raza vizuală d_v, d'_v fiind o orizontală (este paralelă cu ***d, d')*** şi trecând prin centrul de vedere ***v, P****,* aparține planului orizontului şi va intersecta tabloul numai pe linia orizontului.

De aici se desprinde o concluzie foarte importantă:
toate orizontalele au punctul de fugă pe linia orizontului.

Odată punctul de fugă construit, se trece la determinarea celor două urme pe tablou, ***u*** şi ***U****,* corespunzătoare proiecției orizontale ***d*** şi a dreptei ***D*** din spațiu.

Dreapta f_dU este perspectiva dreptei din spațiu, iar $f_d\,u$ perspectivă proiecției ei orizontale.

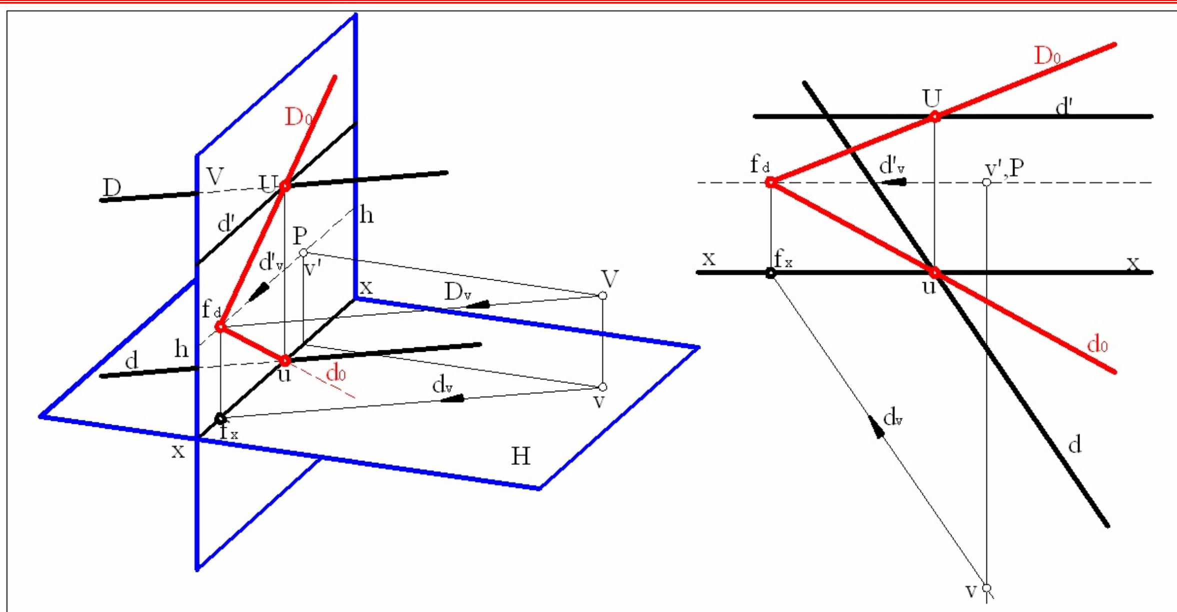


Fig. 11.12. Perspectiva dreptei orizontale D.

11.3.2. Perspectiva dreptei principale

Prin dreaptă principală se înțelege dreapta perpendiculară pe tabloul de perspectivă, deci o orizontală într-un caz particular față de tablou. Când tabloul de perspectivă coincide cu planul vertical de proiecție, dreapta principală nu este altceva decât dreapta de capăt din dubla proiecție ortogonală.

Punctul de fugă al acestei drepte este chiar punctul principal ***P,*** deoarece raza vizuală a punctului de la infinit al dreptei coincide cu raza principală de privire (figura 11.13). Cum dreapta principală se proiectează ortogonal pe tablou după un punct, acesta va fi şi urma dreptei pe tablou. Deci dacă se uneşte ***P*** cu ***U,*** identic cu ***d'*** redus la un punct, se obține perspectiva dreptei principale ***D*** din spațiu; ***Pu*** va fi perspectiva proiecției orizontale a dreptei.

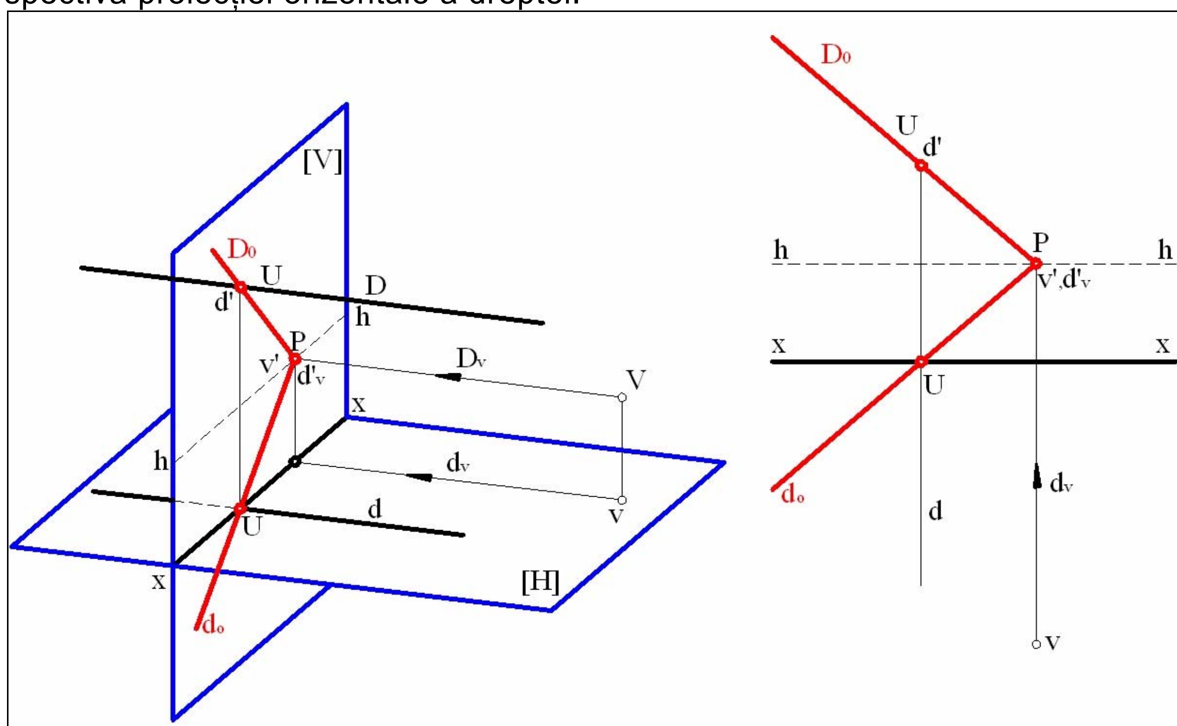


Fig. 11.13. Perspectiva dreptei principale.

11.3.3. Perspectiva dreptei verticale

Pentru dreapta verticală nu se poate folosi nici urma ei pe tablou şi nici punctul de fugă, deoarece aceste puncte sunt aruncate la infinit, dreapta fiind paralelă cu tabloul (figura 11.14). Rezultă că <u>*perspectiva unei verticale este tot o verticală*</u> determinată de intersecția planului proiectant vertical al dreptei (definit de centrul de vedere ***V*** şi de verticala respectivă din spațiu) cu tabloul. Acest plan proiectant are ca urmă orizontală dreapta R_h ce uneşte pe ***v*** cu ***d*** şi care, prelungită, întâlneşte linia de pămînt R_x, pe unde va trece urma verticală R_v a planului.

Urma verticală R_v nu este altceva decât perspectiva D_0 a verticalei ***D*** din spațiu.

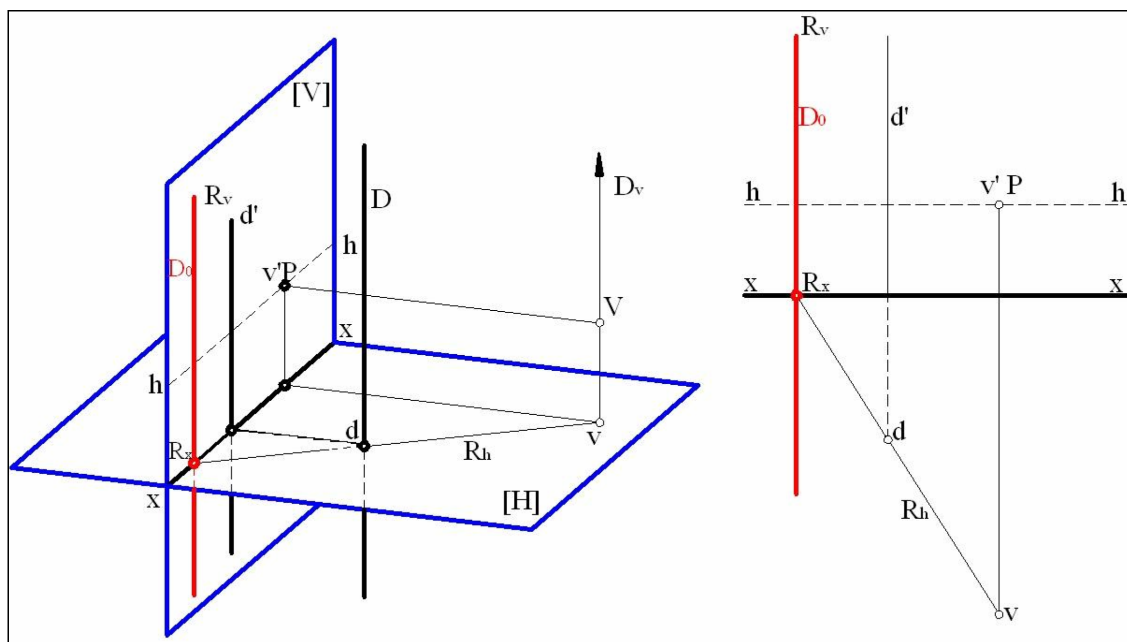


Fig. 11.14. Perspectiva dreptei verticale.

11.4. Perspectiva planului şi a figurilor plane

11.4.1. Perspectiva planului

În proiecția conică, un plan se defineşte prin proiecția conică a elementelor care îl determină: trei puncte, două drepte concurente etc.

În perspectivă, planul ***R*** (figura 11.15) se reprezintă în general prin perspectiva urmei orizontale R_h şi prin perspectiva dreptei sale de la infinit (dreapta de la infinit este dreapta comună planelor din spațiu paralele între ele). Perspectiva urmei orizontale R_h a planului se obține (figura 11.15, a), unind pe f_r (punctul de fugă al urmei R_h) cu R_x (urma dreptei R_h pe tablou).

Perspectiva dreptei de la infinit a planului ***R*** rezultă din intersecția cu tabloul, a planului care conține centrul de vedere ***V*** şi este paralel cu planul respectiv. Această dreaptă, se notează cu F_r (indicele corespunde notației planului) şi se numeşte *dreapta de fugă* a planului. Dreapta de fugă şi perspectiva urmei orizontale a planului au un punct comun în f_r pe linia orizontului, pe unde trec perspectivele tuturor dreptelor de nivel ale planului.

Orice dreaptă a planului apare în perspectivă cu punctul ei de fugă pe dreapta de fugă a planului şi cu perspectiva urmei orizontale pe perspectiva urmei orizontale a planului.

În epură (figura 11.15, b) se construieşte f_r cu ajutorul razei vizuale d_r, d'_r paralelă cu R_h şi apoi, unind pe f_r cu R_x, se obține R_{ho} - perspectiva urmei orizontale. Paralela la R_v dusă prin f_r constituie dreapta de fugă F_r a planului.

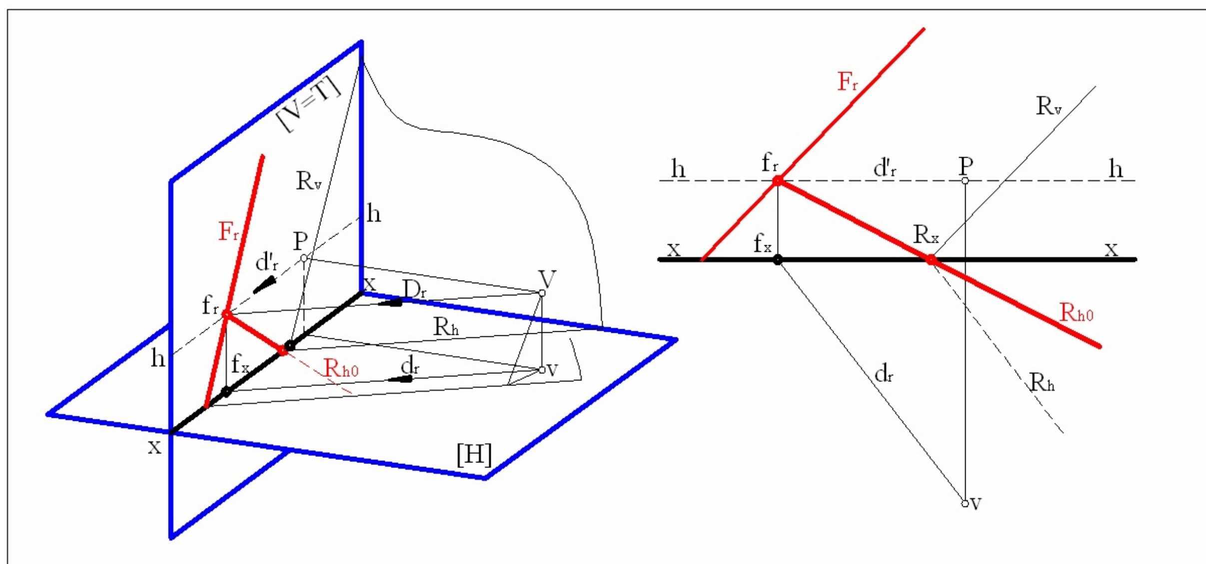


Fig.11.15. Perspectiva planului R.

Trecând la *planele particulare* se stabilesc următoarele proprietăți particulare în perspectivă:

Planele de nivel au ca dreaptă de fugă linia orizontului şi deci dreptele de nivel aparținând diferitelor plane de nivel au punctele de fugă pe linia orizontului.

Planele verticale paralele între ele au ca dreaptă de fugă o dreaptă verticală (perpendiculară pe ***x-x***), deoarece urmele verticale ale planelor verticale sunt perpendiculare pe ***x-x***. Orice dreaptă dintr-un plan vertical va avea punctul de fugă ***F*** al dreptei din spațiu pe aceeaşi verticală cu ***f***, punctul de fugă al proiecției orizontale, deoarece ambele puncte de fugă trebuie să se găsească pe dreapta de fugă a planului vertical.

11.4.2. Perspectiva figurilor plane din geometral

Imaginea perspectivă a unei figuri poligonale plane din spațiu se obține fie prin unirea perspectivelor vârfurilor poligonului, fie prin perspectivele laturilor lui.

Se recomandă, în cazul al doilea, să se folosească, ori de câte ori este posibil, punctele de fugă ale diferitelor laturi ale figurii, deoarece perspectivele dreptelor paralele se determină mai simplu şi mai precis. Punctele de fugă ale laturilor figurii trebuie să se găsească pe dreapta de fugă a planului (condiția ca figura din spațiu să fie plană).

Dacă se consideră figura poligonală în geometral, toate laturile figurii vor avea punctele de fugă pe linia orizontului.

Fie un pătrat de nivel ***abce*** (figura 11.16, a) situat în geometral.

Pentru ca pătratul să apară văzut dintr-o parte, centrul de vedere se ia în zona determinată, de exemplu, de prelungirea laturilor ***ab*** şi ***bc*** şi cu ***v*** mai apropiat de prelungirea laturii ***bc***, pentru ca latura ***ab*** să fie văzută mai mult.

Se ia apoi arbitrar baza ***x-x*** a tabloului, aşa cum s-a stabilit, perpendiculară pe raza principală de privire ***vG****.*

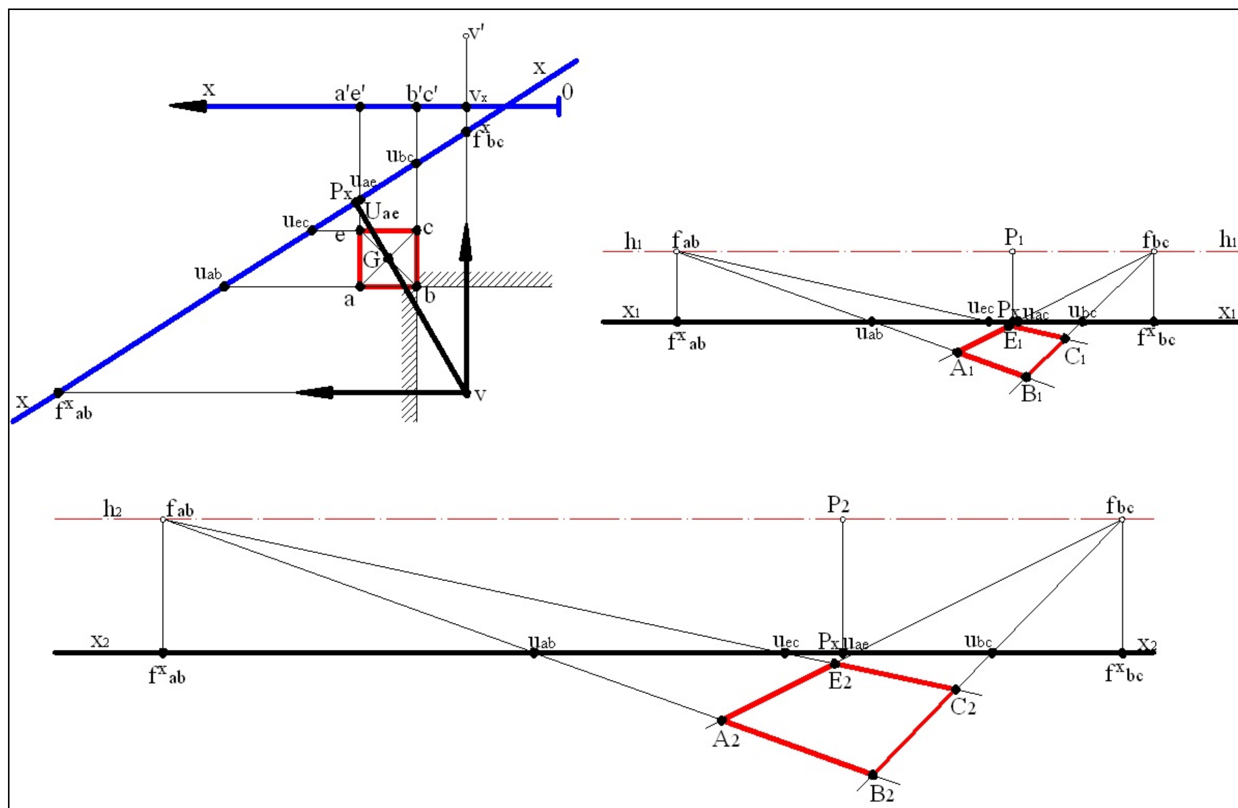


Fig. 11.16.a,b,c. Perspectiva unui pătrat ABCE.

Pentru a pune pătratul ***abce, a'b'c'e'*** în perspectivă prin laturile lui, se procedează astfel:

Se determină, întâi punctele de fugă f^x_{ab} şi f^x_{bc} ale perechilor de laturi paralele şi urmele U_{ab}, U_{ce}, U_{ae} şi U_{bc} ale laturilor pătratului pe baza ***x-x****.*

Deoarece tabloul apare în epură cu ***x-x*** înclinată față de linia de pămint **O*x****,* acesta poate fi luat separat de geometral cu x_1-x_1 paralelă la marginea de jos a hârtiei (figura 11.16, b). Trecerea din geometral al urmelor dreptelor, precum şi a punctelor de fugă respective de pe ***x-x*** în geometral, pe x_1-x_1, se face folosind ca punct de reper, punctul P_x pe ***x-x,*** respectiv P_x pe x_1-x_1.

Linia orizontului în tablou se ia față de x_1-x_1 la o distanță egala cu v_xv' (cota centrului de vedere).

Folosind în tablou perspectivele dreptelor corespunzătoare laturilor pătratului, se determină prin intersecția lor vârfurile imaginii perspective a pătratului precum şi laturile lui.

Această metodă de pregătire a geometralului separat de tablou prezintă avantajul că se pot obține imagini perspective mărite de câte ori dorim (figura 11.16, b, c).

Deci, pentru a obține o imagine perspectivă a pătratului mărită de două ori va trebui ca distanțele ce se iau din geometral de pe ***x-x*** să fie transpuse pe x_2-x_2 mărite de două ori în tabloul de perspectivă separat de geometral, iar linia orizontului h_2—h_2 se va trasa la o distanță de x_2-x_2 de două ori cota centrului de vedere, deci distanța v_xv' dublată (figura 11.16, c).

11.5. Perspectiva elementelor din spaţiu

Perspectiva elementelor din spaţiu se construieşte folosind perspectivele punctelor caracteristice ale acestora. Majoritatea procedeelor utilizate au la bază un principiu comun, şi anume: *punctul poate fi definit geometric ca intersecţia a două drepte, deci perspectiva unui punct dat se poate obţine din intersecţia perspectivelor* a *două drepte ce trec prin el.* Unele din aceste procedee folosesc construirea directă a perspectivelor punctelor din spaţiu ce determină clădirea, fiind indicate mai ales pentru punerea în perspectivă a volumelor simple, altele pornesc întâi cu construirea în perspectivă a „planului" clădirii, urmând apoi ca prin construcţii directe în tablou să rezulte şi ridicarea volumului în spaţiu; acestea din urmă se recomandă pentru perspectivele clădirilor complexe sau ansambluri de clădiri. Toate se bazează pe perspectiva dreptei, fie în cazul general, fie în cazurile particulare. Se vor analiza procedeele cel mai frecvent utilizate pentru construirea volumelor simple.

11.5.1. Perspectiva directă a punctelor din spaţiu

Pentru simplificarea construcţiilor grafice necesare punerii în perspectivă a unui punct din spaţiu cu ajutorul a două drepte este indicat a se utiliza dreptele particulare: de nivel, principală şi verticală. Perspectiva punctului rezultă din intersecţia perspectivelor celor două drepte duse prin punct.

În funcţie de alegerea celor două drepte particulare care să determine punctul din spaţiu, se deosebesc următoarele procedee:

a. **Procedeul ce utilizează pentru definirea punctului o verticală şi o dreaptă principală.**

Pentru a construi perspectiva verticalei ***d,d'*** (figura 11.17) dusă prin punctul ***a, a'*** se foloseşte punctul $\boldsymbol{R_x}$*,* rezultat din intersecţia urmei orizontale $\boldsymbol{R_h}$ (dreapta ce trece prin punctele ***v*** şi ***a***) a planului vertical vizual al dreptei, cu ***x-x****,* baza tabloului (figura 11.17, a). Perpendiculara din $\boldsymbol{R_x}$ pe $\boldsymbol{x_1}$**-**$\boldsymbol{x_1}$ reprezintă perspectiva verticalei ***d,d'*** în tabloul separat (figura 11.17,b).

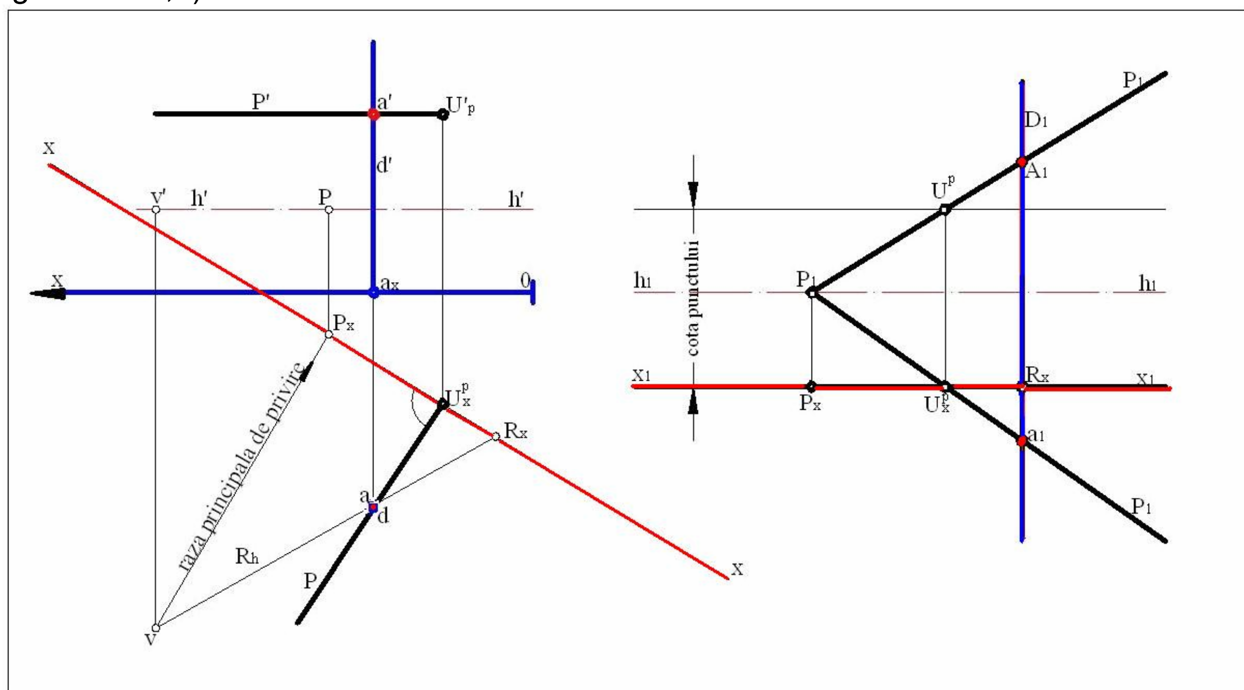


Fig.11.17.a,b. Procedeul vP.

Trecând la perspectiva dreptei principale ***p,p',*** se construieşte u^P_x (urma proiecţiei orizontale ***p*** a dreptei principale pe ***x-x***), care apoi se transpune în tabloul separat atât în punctul u^P_x pe x_1-x_1 pentru proiecţia orizontală, cât şi în punctul U^P pe aceeaşi linie de ordine cu u^P_x pentru dreapta din spaţiu.

Dreptele P_1U^P şi $P_1 u^P_x$, perspectiva dreptei principale din spaţiu, respectiv a proiecţiei ei orizontale, intersectează dreapta D_1 (perspectiva verticalei) în punctul A_1, a_1, perspectiva punctului.

Pentru simplificarea vorbirii, să denumeşte acest procedeu, procedeul ***vP*** *(****v*** este centrul de vedere utilizat pentru perspectiva verticalelor, iar ***P*** punctul de fugă al dreptelor de capăt).

b. **Procedeul ce foloseşte pentru determinarea punctului o verticală şi o orizontală oarecare** (figura 11.18, a,b).

Perspectiva verticalei în tabloul separat se obţine ca în cazul precedent, ducând prin R_x dreapta D_1 perpendiculară pe x_1–x_1 (figura 11.18, b). Unind în tabloul separat punctele U^n şi u^n_x cu f^n (punctul de fugă al orizontalei ***n,n'***), se obţin dreptele: N_1, perspectiva orizontalei duse prin ***A*** şi n_1, perspectiva proiecţiei ei orizontale duse prin a_1.

Din intersecţia dreptelor N_1 şi n_1 cu dreapta D_1, rezultă punctele A_1 şi a_1, care reprezintă perspectiva punctului ***a, a'*** din spaţiu.

Prescurtat, se denumeşte procedeul ***vF*** *(v* este centrul de vedere, iar *F* , punctul de fugă al orizontalelor).

Observaţie: Segmentul $A_1 a_1$ este perspectiva segmentului vertical ***Aa*** din spaţiu.

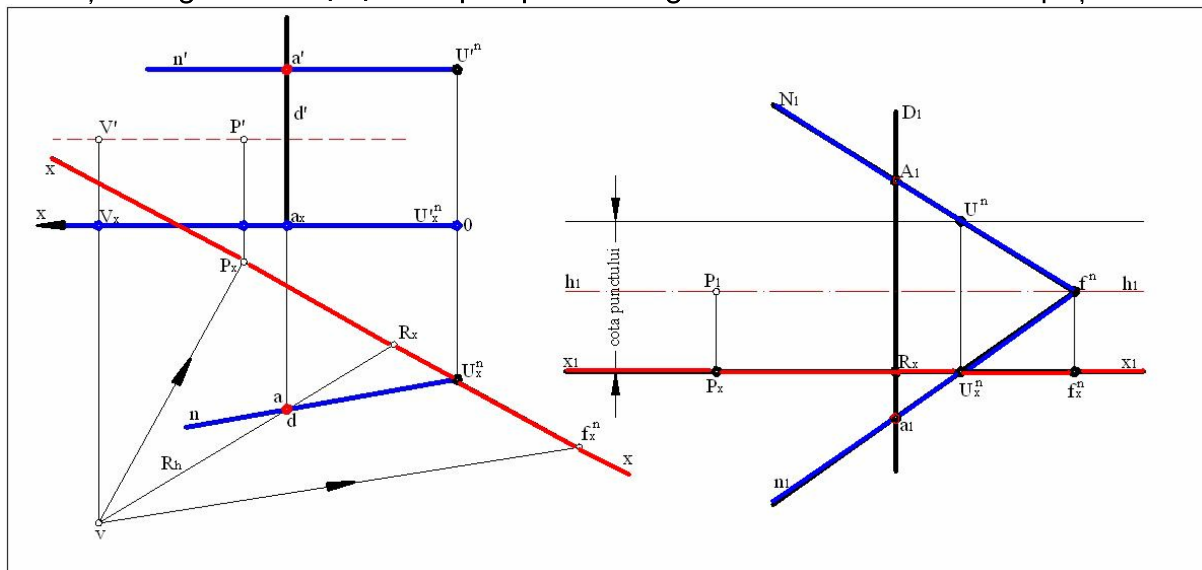


Fig.11.18.a,b. Procedeul vF.

c. **Procedeul ce foloseşte pentru determinarea punctului o dreaptă principală şi o dreaptă orizontală oarecare** (figura 11.19, a, b).

Perspectiva unui punct ***a, a'*** (figura 11.19, a) pe tabloul de bază ***x-x*** se obţine din intersecţia perspectivelor celor două drepte, ***p,p'*** principală şi ***n,n'*** orizontală, duse prin punct. Punctul A_1 (perspectiva punctului ***A*** din spaţiu) rezultă din intersecţia dreptelor P_1U^P şi $f^n U^n$ (perspectivele dreptei principale ***p,p'*** respectiv a dreptei de nivel ***n,n'*** din spaţiu duse prin ***a, a'***), iar punctul a_1, din intersecţia perspectivelor proiecţiilor orizontale ale

dreptelor respective. Punctele A_1 şi a_1 trebuie să se găsească pe aceeaşi verticală, segmentul $A_1 a_1$ fiind perspectiva segmentului vertical ***Aa*** din spaţiu.
Prescurtat, se denumeşte acest procedeu ***Pf****.*

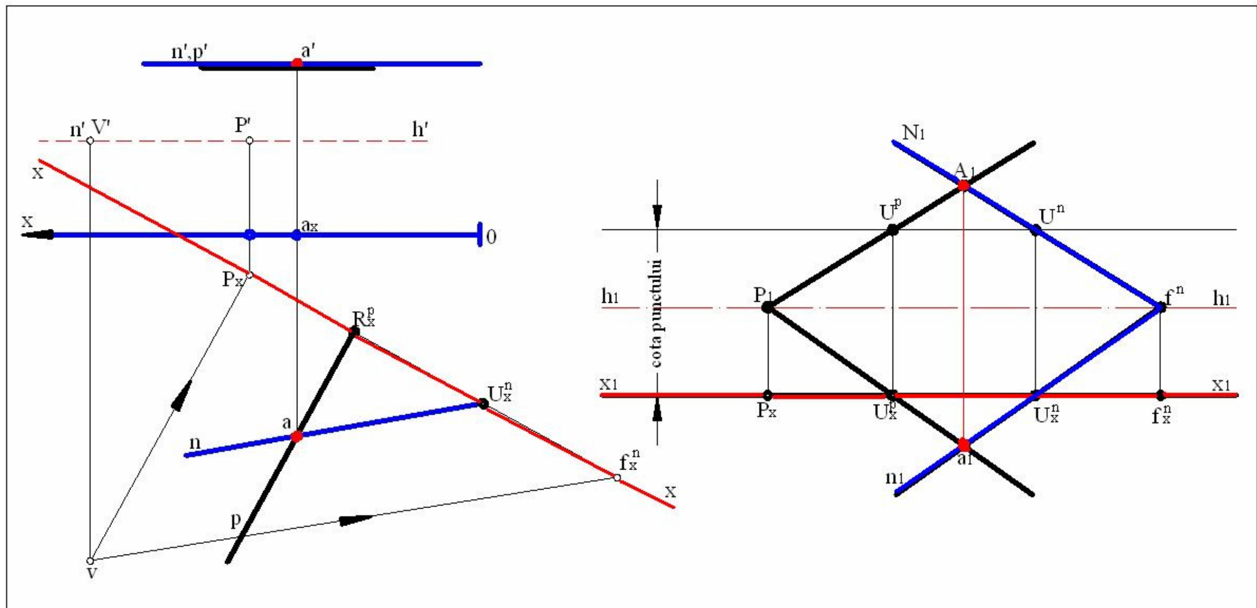


Fig.11.19.a,b. Procedeul Pf.

d. **Procedeul ce foloseşte pentru determinarea punctului doua drepte de nivel de direcţii ce fac între ele un unghi de n°.**

Se folosesc două orizontale care fac între ele un unghi de 90°, de aceea *procedeul poartă denumirea de* ff^{90°. Procedeul ff^{90° deşi ar fi cel mai indicat pentru punerea în perspectivă a clădirilor, deoarece acestea prezintă muchii orizontale perpendiculare între ele, nu poate fi utilizat întotdeauna deoarece rezultă o distanţă foarte mare între punctele de fuga f_x şi $f^{90^\circ}_x$ corespunzătoare orizontalelor ce definesc punctele din spaţiu, de unde şi posibilitatea ca unul din punctele de fugă să nu intre în cadrul de lucru.

e. **Procedeul *fM.***

Acest procedeu corespunde cazului în care *punctul din spaţiu este definit prin două drepte orizontale dintre care direcţia uneia este determinată ce poziţia celeilalte,* şi anume: dacă prima orizontală poate fi luată la alegere, a doua orizontală se ia la fel înclinată faţă de prima şi faţă de tablou.

Punctul de fugă M_1 *se numeşte* *punct de măsură,* pentru că el este punctul de fugă al dreptelor de nivel ce transpun segmentele de pe baza ***x-x*** a tabloului, egal pe dreapta orizontală ***d*** şi invers, dând posibilitatea să măsurăm segmentele orizontale date în perspectivă prin aducerea lor de pe suportul orizontal d_1 pe baza x_1-x_1 a tabloului cu ajutorul punctului de măsură respectiv.

f. Procedeul *PD.*

Este un caz particular al procedeului ***fM***, şi anume când orizontala ***d,d'*** devine perpendiculară pe tablou, deci o dreapta principală, iar dreapta $m_a m_{a'}$ devine o dreaptă la 45° atât faţă de dreapta principală cât şi de tablou. Punctul de fugă al dreptei la 45° se notează cu D^+ sau D^-, după cum dreapta respectivă face un unghi de 45° pozitiv sau negativ cu ***x-x*** măsurat în sens trigonometric şi se numeşte punct de distanţă.

11.5.2. Perspectiva cu ajutorul elementelor din planul orizontal

Dacă se ține seama că perspectiva oricărui element geometric din spațiu trebuie legată de perspectiva proiecției lui pe planul orizontal, deoarece numai în acest caz poate fi determinată poziția elementului respectiv față de sistemul de referință, rezultă că şi perspectiva unei clădiri trebuie să fie însoțită de perspectiva „planului" clădirii, adică de perspectiva proiecției lui pe planul orizontal. Din această cauză, de multe ori în practică, se obişnuieşte ca perspectiva unei clădiri să fie executată pe baza perspectivei „planului" clădirii; deci, întâi se construiesc perspectivele tuturor elementelor clădirii din planul orizontal de proiecție şi apoi, prin utilizarea diferitelor construcții grafice în tabloul de perspectivă, se determină şi perspectiva verticală a clădirii.

Această metodă este cu atât mai indicată cu cât „planul" clădirii este mai complex sau când este cazul punerii în perspectivă a unor ansambluri mari de clădiri.

Pentru punerea în perspectivă a elementelor din geometral poate fi utilizat oricare din procedeele analizate, cu deosebirea că punctele din planul orizontal de proiecție se definesc numai cu ajutorul dreptelor orizontale de cotă nulă, fie în poziții oarecare, fie perpendiculare față de baza tabloului. Este de remarcat faptul că urmele acestor drepte se găsesc numai pe baza ***x-x*** a tabloului, iar punctele de fugă respective, numai pe linia orizontului ***h—h***.

Una dintre căile cele mai simple pentru punerea în perspectivă orizontală a unui volum complex, şi în special pentru ansambluri, este aceea cu ajutorul unui caroiaj, determinat de rețele de drepte de direcții perpendiculare între ele.

Una din rețele se consideră alcătuită din drepte paralele cu baza ***x-x*** a tabloului, iar cea de-a doua, cu drepte perpendiculare pe baza ***x-x*** a tabloului. Apoi aceste rețele se pun în perspectivă (fig.11.20).

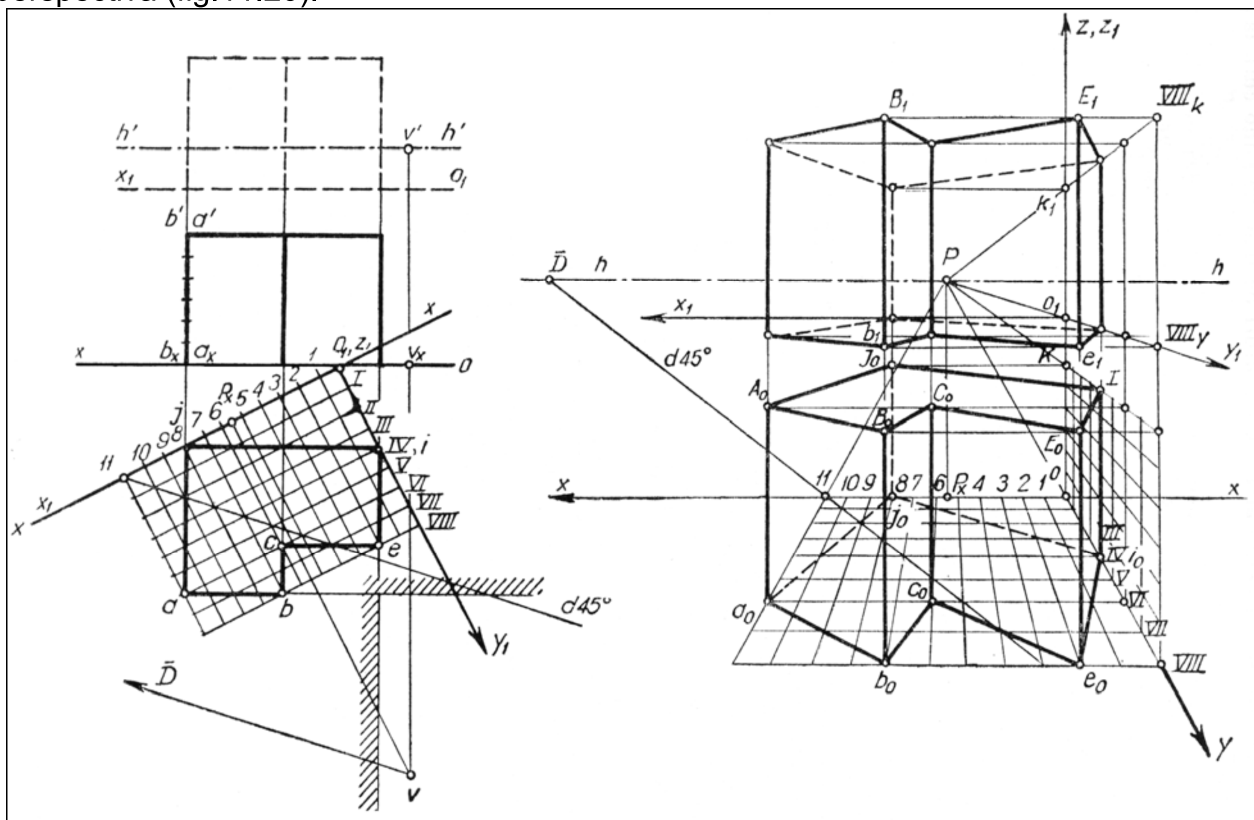


Fig. 11.20. Perspectiva cu ajurorul rețelei

11.6. Aplicații:

1.Perspectiva punct cu punct, a unui corp de clădire prin procedeul vf

Fie în figura 11.21 o clădire cu două corpuri reprezentată în dublă proiecție ortogonală. Indiferent de procedeul care se va folosi pentru construirea imaginii perspective este necesar, mai întîi, să se fixeze elementele de bază ale sistemului perspectiv. Pentru aceasta:

Se determină zona de vizibilitate prin prelungirea laturilor ***ab*** şi ***eh*** astfel ca să apară văzute în perspectivă fețele ***ab, eif, eh*** şi ***ad*** ale clădirii. Pentru ca imaginea perspectivă a corpului ***abcd*** să se suprapună pe fațada ***ef*** a corpului ***efgh*** până în dreptul verticalei punctului ***m**,* punctul de vedere ***v*** se ia pe dreapta ce uneşte punctele ***m*** şi ***b**.*

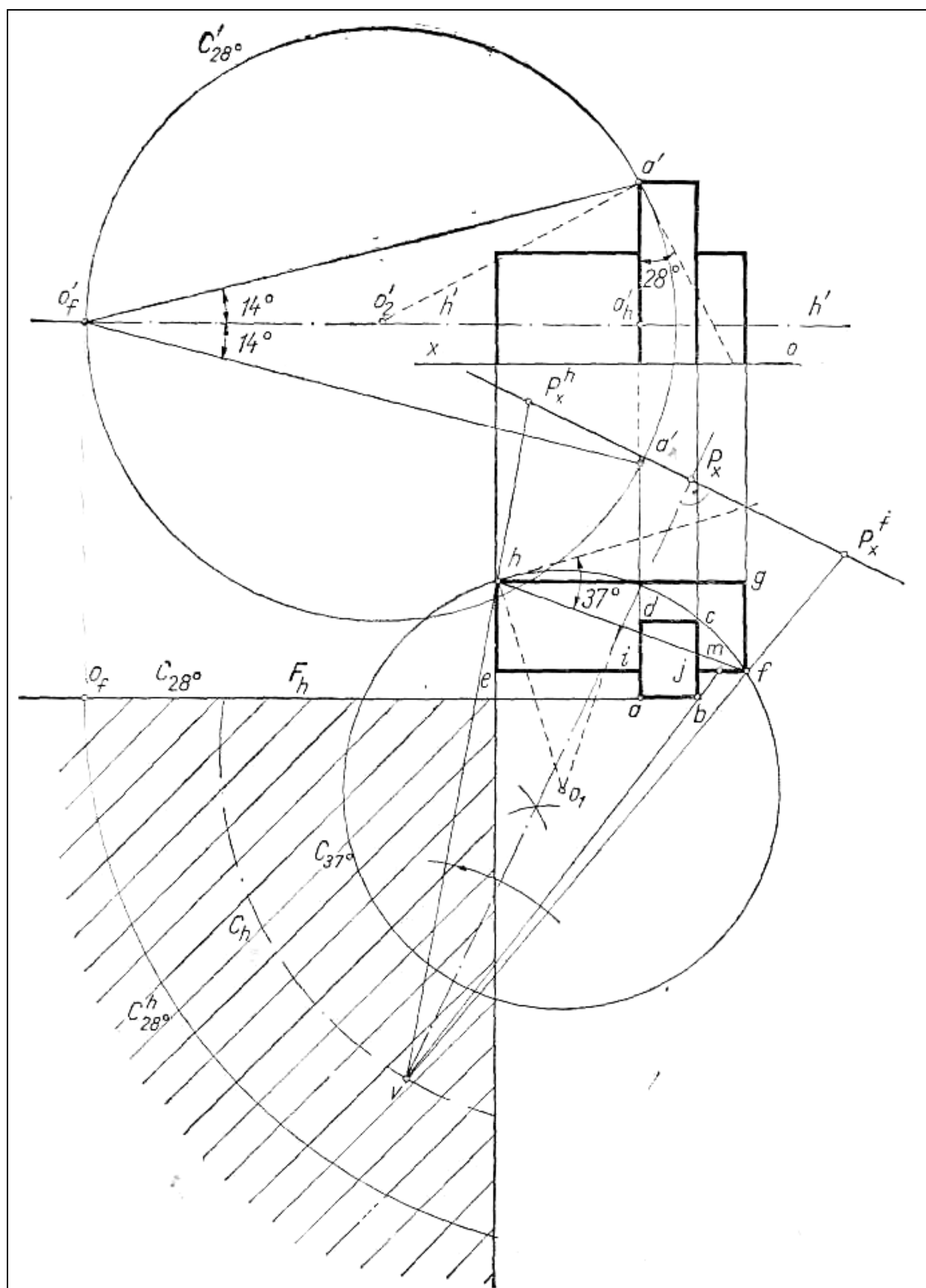


Fig.11.21. Alegerea punctului de vedere

Pentru fixarea punctului ***v*** trebuie să se țină seama de ambele unghiuri vizuale deoarece clădirea conține şi un corp înalt.

Unghiul vizual orizontal de **37°** se asigură dacă ***v*** se ia pe arcul de cerc capabil de unghi de **37°** - $hc_{37}f$ - ce trece prin punctele ***h*** şi ***f.***

Pentru a asigura unghiul vizual vertical, se construieşte în planul frontal $F_h ab$ ce trece prin verticala punctului ***a*** şi care apare în adevărata mărime în proiecție verticală, arcul de cerc capabil de unghi de **28°** ce apare în proiecție verticală în adevărata mărime după arcul $a'c'_{28}a'_1$ dus prin ***a'*** şi a'_1 (a'_1 simetricul lui ***a'*** față de ***h'-h'***).

Din intersecția acestui arc de cerc cu ***h'-h'*** rezultă punctul o'_f ce se coboară în proiecție orizontală pe ***Fh*** în o_f. Prin luarea punctului ***v*** pe arcul de cerc $c^h{}_{28}o$ cu centrul în ***a*** şi raza ao_f se asigură ca volumul să fie înscris în unghiul vizual vertical.

Dar, punctul ***v*** nu poate fi luat pe cele două arce de cerc, c_{37o} sau $c^h{}_{28o}$, decât în punctul lor de intersecție. Cum aceste două arce de cerc nu se intersectează în zona de vizibilitate, se trasează cu aproximație curba intermediară ***ch***, la egală distanță de arcele de cerc c_{37o} şi $c^h{}_{28o}$, şi din intersecția ei cu dreapta ***am*** rezultă poziția proiecției orizontale ***v*** a punctului de vedere.

Se uneşte ***v*** cu ***h*** şi ***f ,*** punctele extreme spre stânga, respectiv spre dreapta observatorului ale ansamblului, obținându-se *unghiul vizual optim.*

Se trasează apoi bisectoarea unghiului vizual optim – ***hvf*** - ca rază principală de privire.

Se determină baza ***x-x*** a tabloului, perpendiculară pe bisectoarea unghiului ***hvf,*** astfel ca razele extreme ***vh*** şi ***vf*** să o intersecteze în punctele $P^h{}_x$ respectiv $P^f{}_x$ la o distanță egală cu lățimea imaginii perspective care trebuie obținută.

Toate aceste operații sunt necesare în alegerea elementelor sistemului perspectiv pentru ca imaginea perspectivă construită să fie cât mai naturală.

În ceea ce priveşte construirea imaginii perspective se poate aplica orice procedeu din cele expuse ***vP, vf, Pf, fM*** sau ***PD****.*

În figura 11.22, s-a utilizat ***metoda vf,*** prin construirea directă a perspectivelor punctelor din spațiu ce determină clădirea.

Elementele sistemului perspectiv luate în figura 11.22 sunt aceleaşi cu cele obținute în figura 11.21.

Se construieşte mai întâi perspectiva corpului de clădire ***abcdABCD,*** un paralelipiped dreptunghic (figura 11.22,b)*,* considerând că prin fiecare punct trec drepte verticale şi orizontale de direcție ***ad.***

Punctul de fugă al orizontalelor se obține cu ajutorul lui f_x determinat din intersecția paralelei la dreapta ***ad*** dusă prin ***v*** cu baza ***x-x*** a tabloului.

Se transpune f_x în tabloul de perspectivă luat separat , prin păstrarea distanței P_xf_x (figura 11.22,b), după care se ridică pe linia orizontului ***h-h*** în ***f***.

Pentru a construi perspectivele punctelor ***A*** şi ***B*** se folosesc orizontala ***AD*** şi verticalele punctelor.

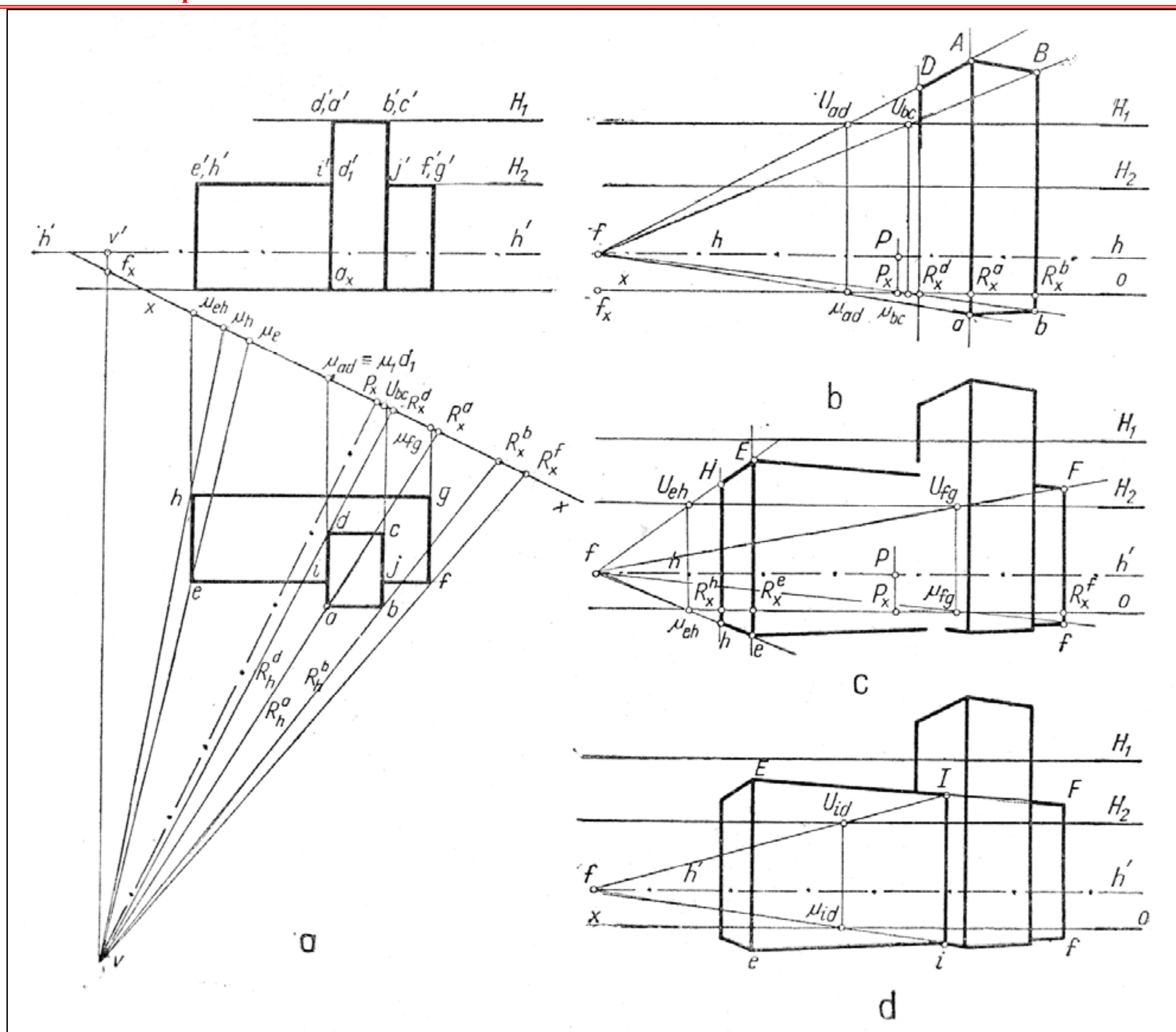


Fig.11.22. Etape de construcție a perspectivei clădirii

Perspectiva orizontalei ***AD*** se obține astfel:

Dreapta ***ad,*** proiecția orizontală a dreptei ***AD*** din spațiu, are ca urmă pe tablou punctul u_{ad} ce se transpune în tabloul luat separat atât pe ***x-x*** în u_{ad} (urma proiecției orizontale ***ad)*** cât şi la nivelul H_1 în punctul U_{ad} (urma dreptei ***AD*** în spațiu).

Dreptele fU_{ad} şi fu_{ad} sunt perspectivele dreptelor ***AD*** din spațiu, respectiv a proiecției orizontale ***ad.***

Perspectivele dreptelor verticale din ***a*** şi ***d*** se obțin cu ajutorul planelor vizuale verticale ce au urmele orizontale $R^a{}_h$ şi $R^d{}_h$ (obținute prin unirea lui ***v*** cu ***a*** respectiv ***d).*** Urmele orizontale $R^a{}_h$ şi $R^d{}_h$ intersectează baza ***x-x*** a tabloului în punctele $R^a{}_x$ respectiv $R^d{}_x$ ce se transpun în tabloul luat separat față de P_x păstrând distanțele $P_X R^a{}_x$ şi $P_x R^d{}_x$.

Verticalele duse prin $R^a{}_x$ şi $R^d{}_x$ (perspectivele verticalelor din ***A***, respectiv ***D***) intersectează dreptele fU_{ad} şi fu_{ad} în punctele ***A*** şi ***D***, respectiv ***a*** şi ***d*** (perspectivele punctelor). ***Aa*** este perspectiva segmentului vertical ***Aa*** din spațiu.

În mod analog, se obține şi perspectiva segmentului ***B b*** din spațiu. Se construieşte perspectiva orizontalei ***BC, bc*** unind punctul de fugă ***f*** cu U_{bc} respectiv u_{bc} (urmele orizontalei). Unind pe ***v*** cu ***b*** se obține $R^b{}_h$ ce intersectează baza ***x-x*** în $R^b{}_x$ ce se transpune în tabloul luat separat. Verticala din $R^b{}_x$ (perspectiva verticalei punctului ***B,b)***

intersectează dreptele ***fU_{bc}*** şi ***fu_{bc}*** (perspectiva orizontalei ce trece prin ***B,b***) în punctele ***B, b***, rezultând perspectiva verticalei limitată de ***B*** şi ***b***.

Se întăresc perspectivele muchiilor ***AB, ab*** şi ***AD*** care se văd precum şi muchiile verticale ***Aa*** şi ***Bb*** (figura 11.22, b).

Se trece la perspectiva celui de al doilea corp ***efghEFGH*** (figura 11.22, c) folosind perspectivele ***fU_{eh}, fu_{eh}*** şi ***fU_{fg}, fu_{fg}*** ale orizontalelor ***EH, eh*** respectiv ***FG, fg*** obținute prin unirea punctului de fugă ***f*** cu urmele ***U_{eh}, u_{eh}*** respectiv ***U_{fg}, u_{fg}*** ale acestor drepte şi verticalele duse prin ***R^h_x, R^e_x*** şi ***R^f_x*** ce reprezintă perspectivele verticalelor duse prin ***H, E*** respectiv ***F***. Prin unirea punctelor determinate se obține imaginea perspectivă ***hef, HEF*** (fețele văzute ale celui de-al doilea corp).

Direct în perspectivă, se poate obține îmbinarea celor două corpuri cu ajutorul punctului ***I,i*** rezultat din intersecția dreptei ***EF, ef*** cu dreapta ***fU_{id}, fu_{id}*** (perspectiva orizontalei ce trece prin punctul ***I, i*** paralelă cu ***ad***).

Aplicația 2:

Să se construiască perspectiva unui paralelipiped prin mai multe metode.

Rezolvare: ***Metodele vf, f^{90}, vP, Pf şi PD*** sunt folosite în figurile 11.23. – 11.28.

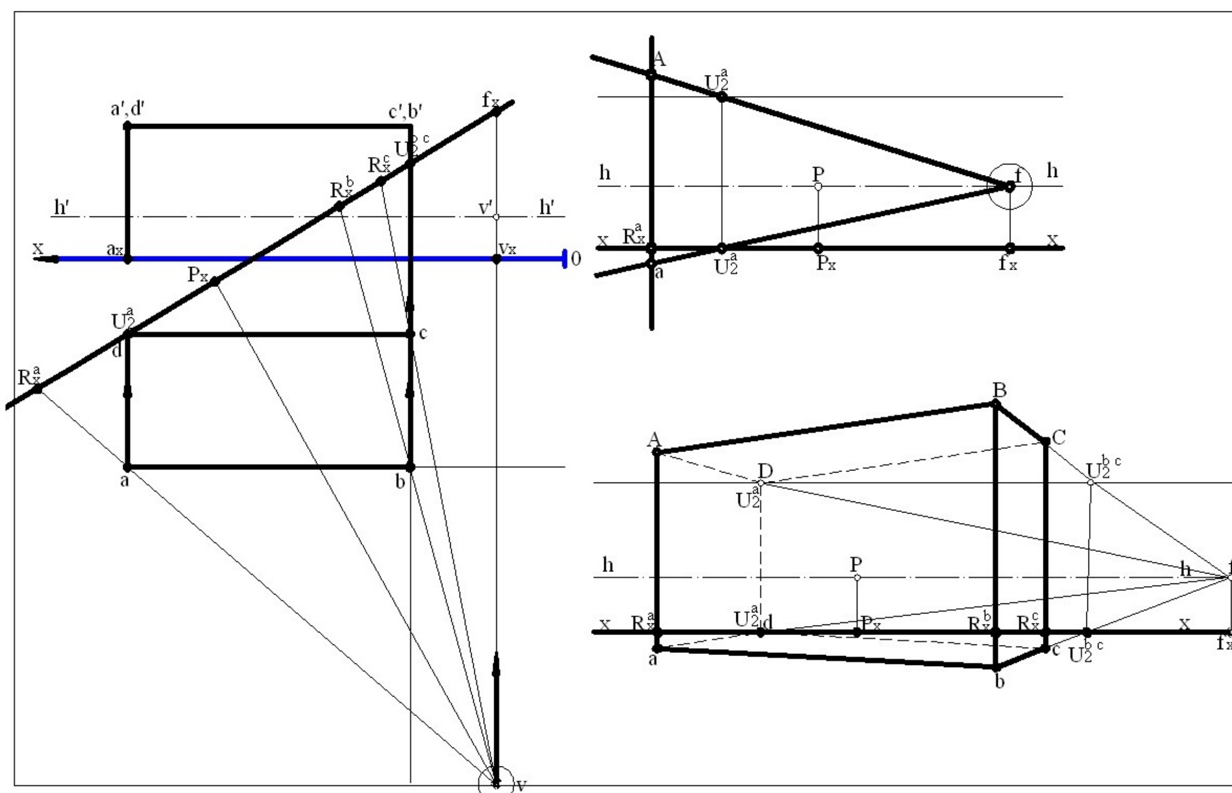


Fig.11.23. Construcția perspectivei prin metoda vf.

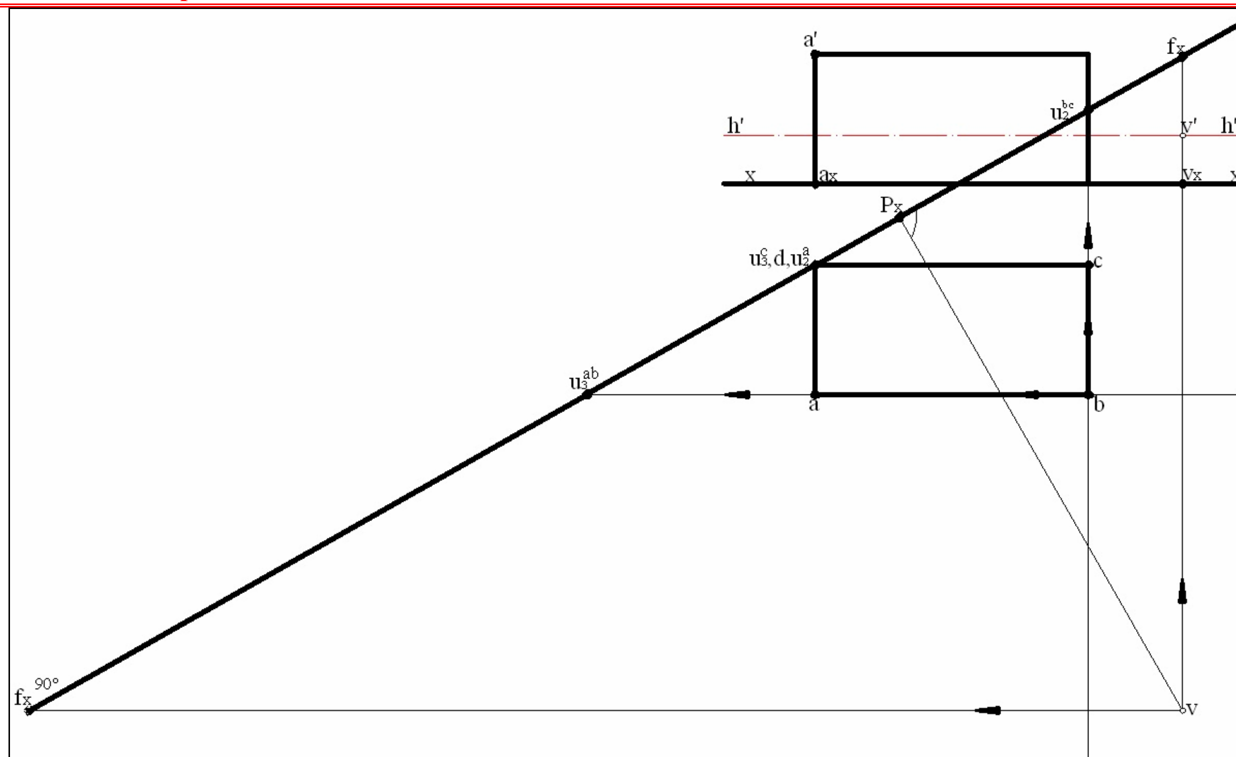


Fig.11.24. Geometralul prin metoda f 90o

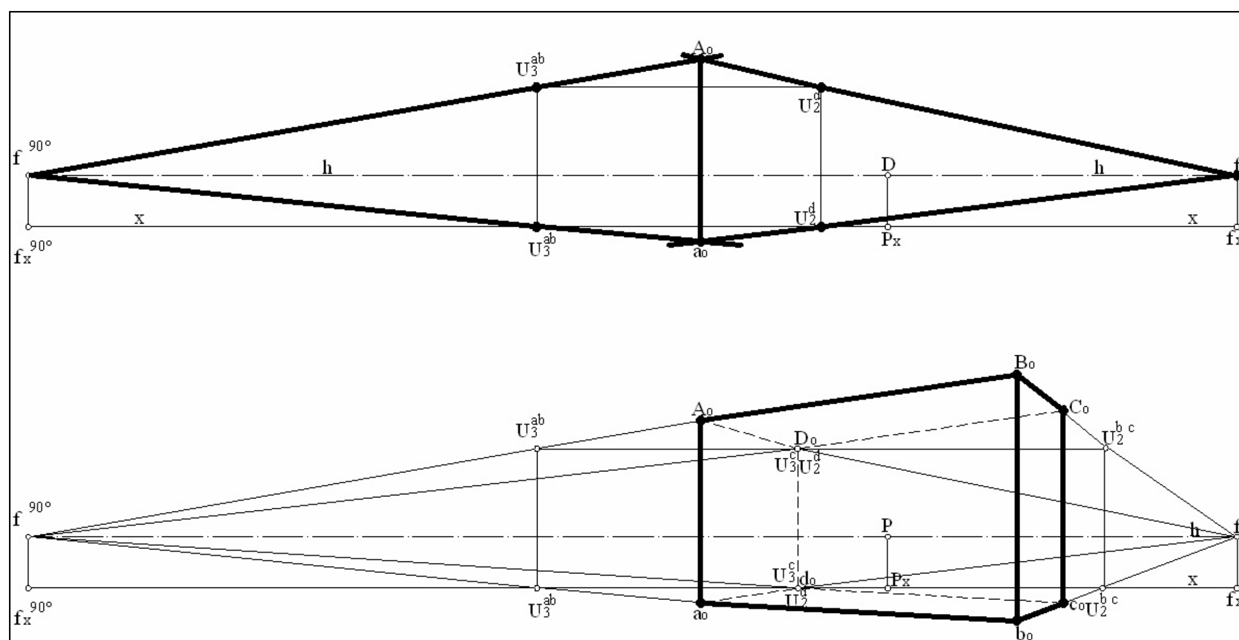


Fig.11.25.Tabloul de perspectivă; construcție prin metoda f 90o

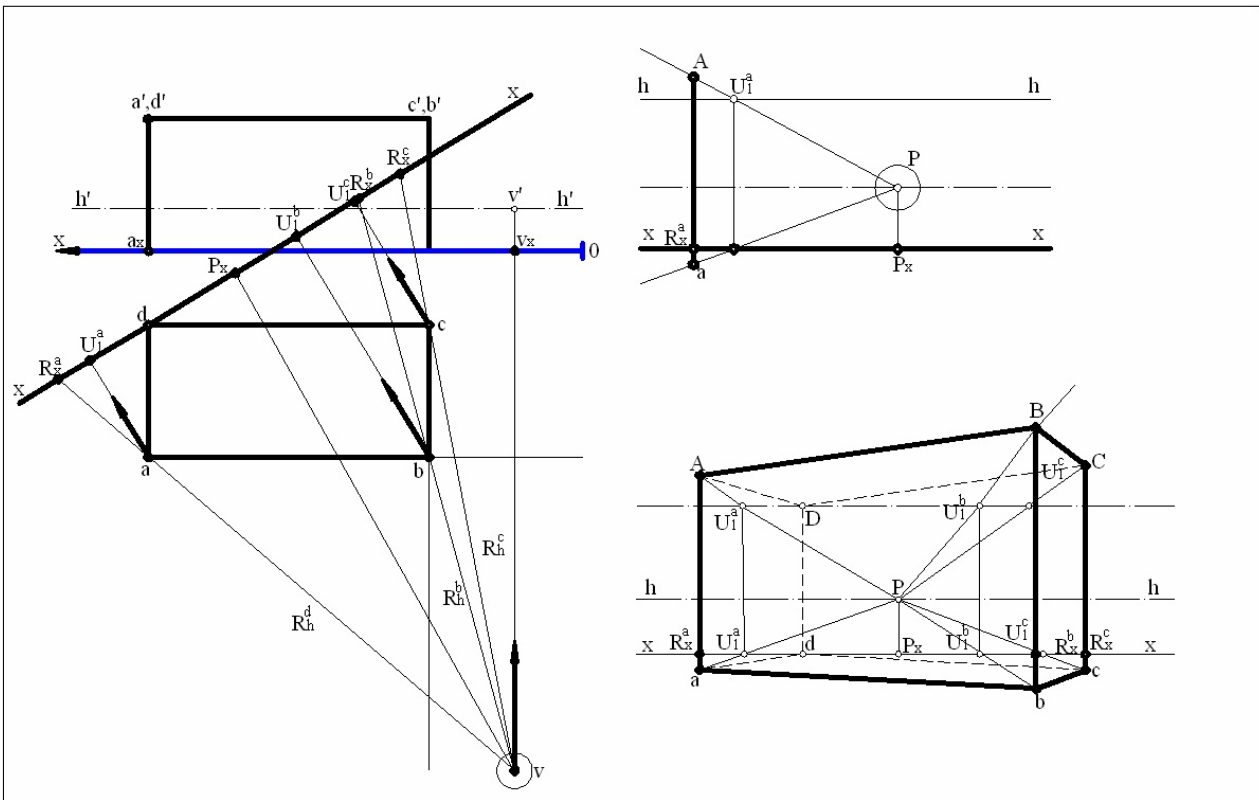


Fig. 11.26. Metoda vP.

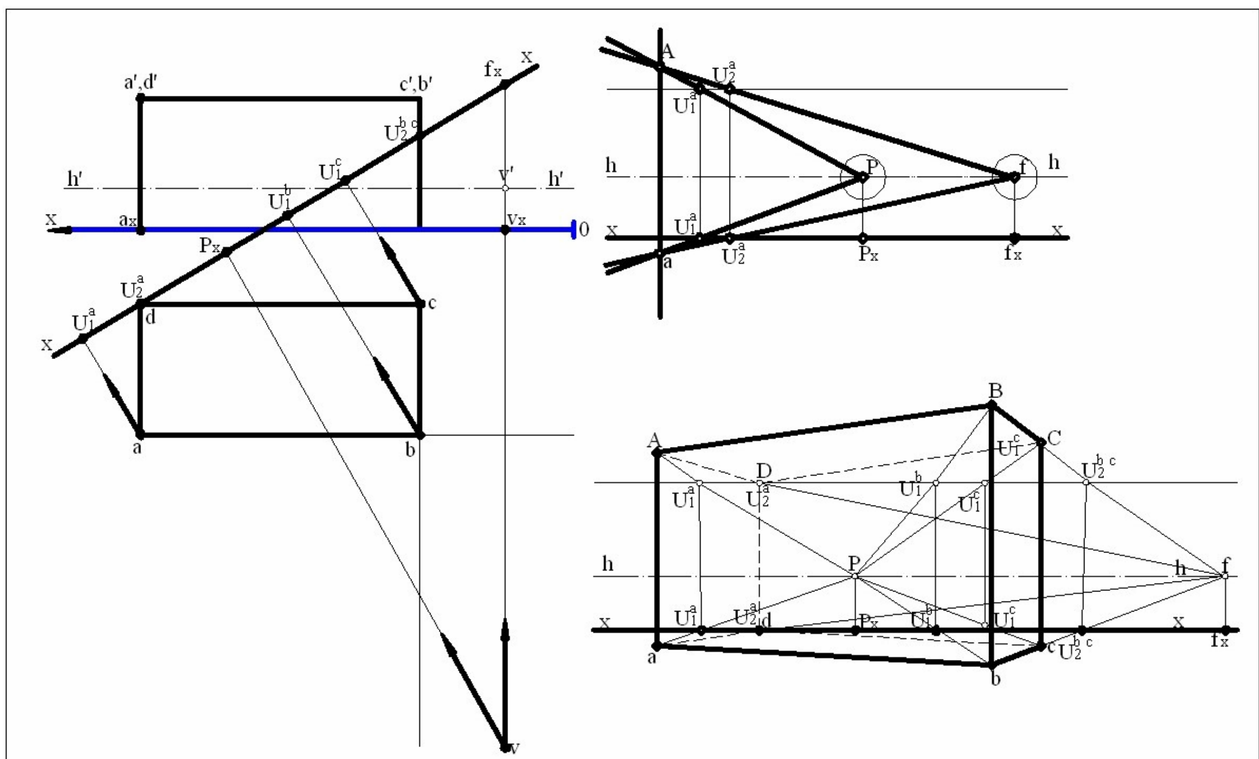


Fig.11.27. Metoda Pf.

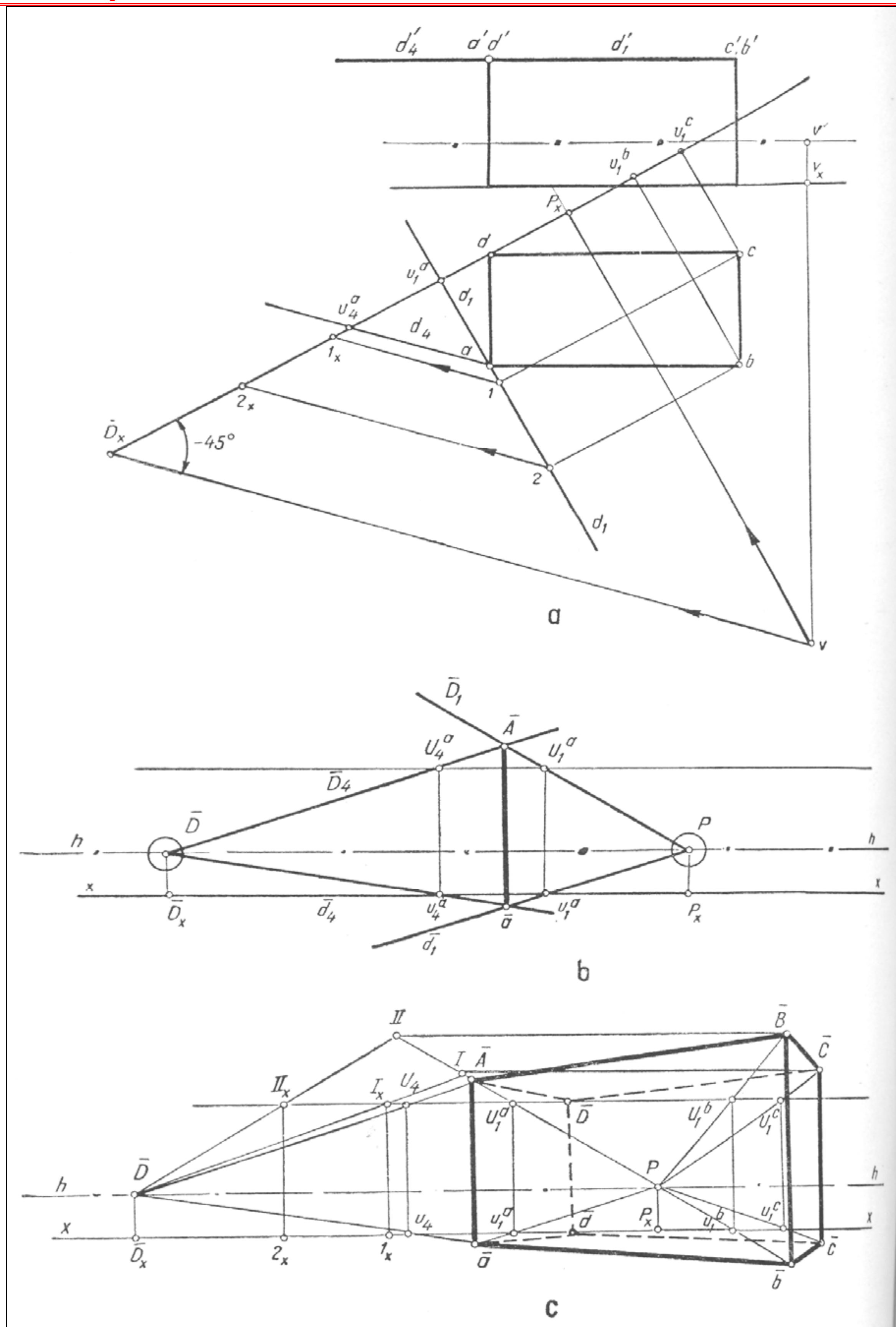


Fig.11.28. Metoda PD.

12.UMBRE

În funcție de poziția în spațiu a sursei de lumină, considerată punctuală, se deosebesc:

— umbra la lumânare când sursa de lumină este la distanță finită. Razele de lumină se iau concurente în punctul ce reprezintă sursa de lumină;

— umbra la soare, când sursa de lumină este la distanță infinită, deplasată pe o dreaptă, numită *direcția razelor de lumină,* iar razele de lumină se iau paralele cu această direcție.

În mod curent, în perspectiva paralelă şi conică, umbrele se construiesc la o direcție luată convenabil pentru a avea anumite suprafețe umbrite. În dubla proiecție ortogonală s-a stabilit ca umbrele să se construiască la o direcție corespunzătoare diagonalei cubului ce are trei din fețele lui în planele de referință, diagonala corespunzând originii sistemului de referință (figura 12.1). În acest caz proiecțiile pe cele trei plane de referință ale diagonalei cubului sunt înclinate față de axele planelor de referință la ***45°***, ceea ce înseamnă că se construieşte ***umbra la 45°.***

12.1. UMBRA PUNCTULUI

Din punct de vedere geometric, umbra unui punct ***A*** pe o suprafață **S** se reduce la intersecția razei de lumină ***LA*** cu suprafața respectivă, raza de lumină ***LA*** fiind dreapta ce trece prin punctul de lumină ***L*** în cazul umbrei la lumânare sau paralelă cu direcția ***D*** a razelor de lumină în cazul umbrei la soare şi prin punctul ***A***.

Umbrele punctelor se notează cu aceeaşi literă cu care este notat punctul din spațiu având ca indice litera cu care s-a notat suprafața. Primul punct de inersecție a razei de lumină cu suprafața este umbră reală, celelalte puncte în care raza de lumină va intersecta aceeaşi suprafață sunt umbre virtuale.

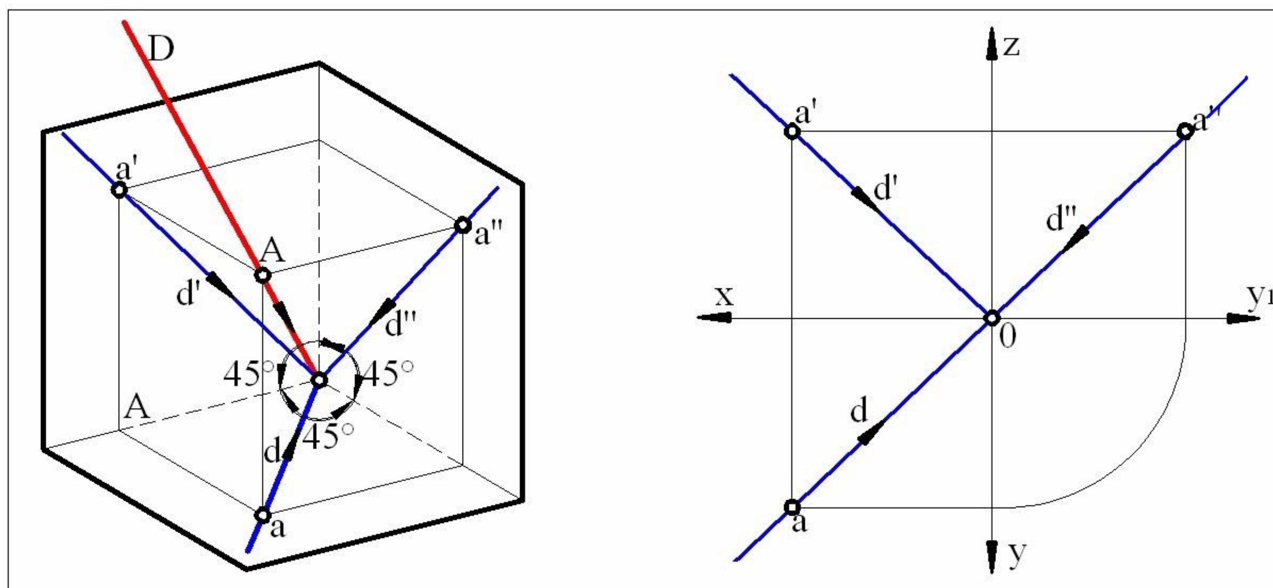


Fig.12.1. Direcția convențională a umbrei

a. Umbra punctului şi a dreptei verticale pe planele de referință

Umbra unui punct pe planele de referință se reduce la determinarea urmelor razei de lumină a punctului pe planele de referință respective.

Umbra punctului în perspectiva paralelă sau axonometrie (figura 12.2).

Umbra punctului ***A,a*** la direcția ***D,d*** pe planul orizontal de referință se obține în punctul A_h, din intersecția razei de lumină R_A a punctului ***A*** din spațiu cu proiecția ei orizontală r_a . Segmentul vertical ***Aa*** are ca umbră pe planul orizontal de referință segmentul aA_h, paralel cu ***d***.

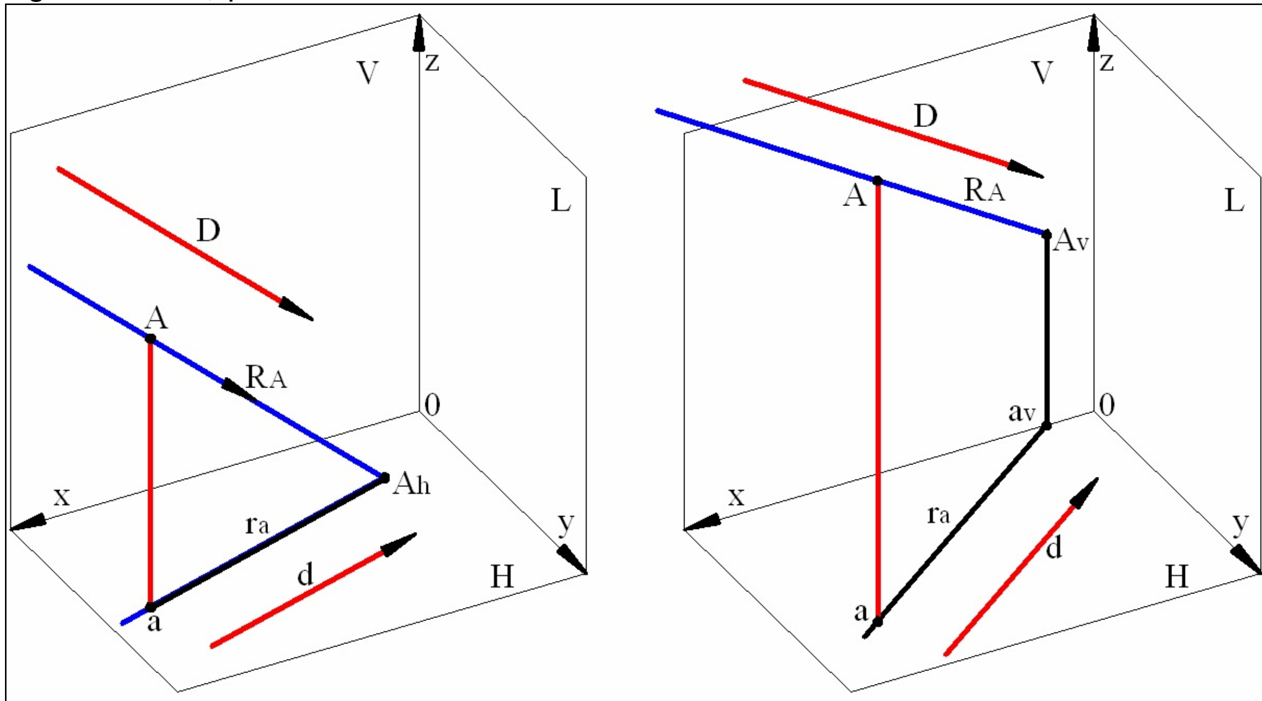


Fig.12.2. Umbra punctului A în axonometrie

Umbra punctului ***A,a*** pe planul vertical de referință, la direcția ***D,d***, se obține în punctul A_v (urma verticală a razei de lumină R_A, r_a a punctului) din intersecția liniei de ordine a punctului a_v (intersecția axei ***ox*** cu r_a) cu raza de lumină R_A a punctului ***A*** din spațiu. Segmentul vertical ***Aa*** poartă umbră pe planele de proiecție după linia frântă aa_vA_v, cu aa_v paralelă la ***d*** şi a_vA_v segment vertical (figura 12.2, b).

Umbra punctului în dubla proiecție ortogonală. În dubla proiecție ortogonală umbrele volumelor se construiesc la direcția razelor de lumină cu proiecțiile înclinate la ***45°*** față de axa ***ox***. Umbra unui punct ***a,a'*** pe planul orizontal de proiecție este punctul a_h,a'_h (urma orizontală a razei de lumină r_a,r'_a) iar pe planul vertical de proiecție punctul a_v,a'_v (urma verticală a razei de lumină) (figura 12.3).

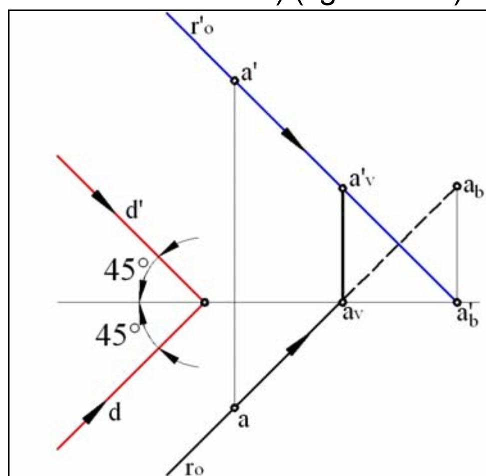


Fig.12.3. Umbra punctului A în epură

Umbra punctului în perspectiva conică (figura 12.4). Direcția ***D*** a razei de lumină din spațiu în perspectivă este determinată de punctul ei de fugă ***S,s***. Rezultă că razele de lumină din spațiu trebuie desenate în perspectivă concurente în punctul de fugă ***S***, iar proiecțiile lor orizontale concurente în ***s***.

Sursa de lumină poate fi considerată la infinit în spatele observatorului sau în fața lui şi atunci punctul de fugă ***S*** se va lua sub, respectiv deasupra liniei orizontului, iar ***s*** pe linia orizontului.

Cele trei poziții pe care le poate avea sursa de lumină la infinit sunt:

— ***S,s*** în spatele observatorului sau spațiul virtual, (figura 12.4, a);

— ***S,s*** în planul neutru (figura 12.4, b). În acest caz umbra se construieşte la direcția frontală ***D, d,*** iar razele de lumină rămân paralele;

— ***S,s*** în fața observatorului sau spațiul real, (figura 12.4, c).

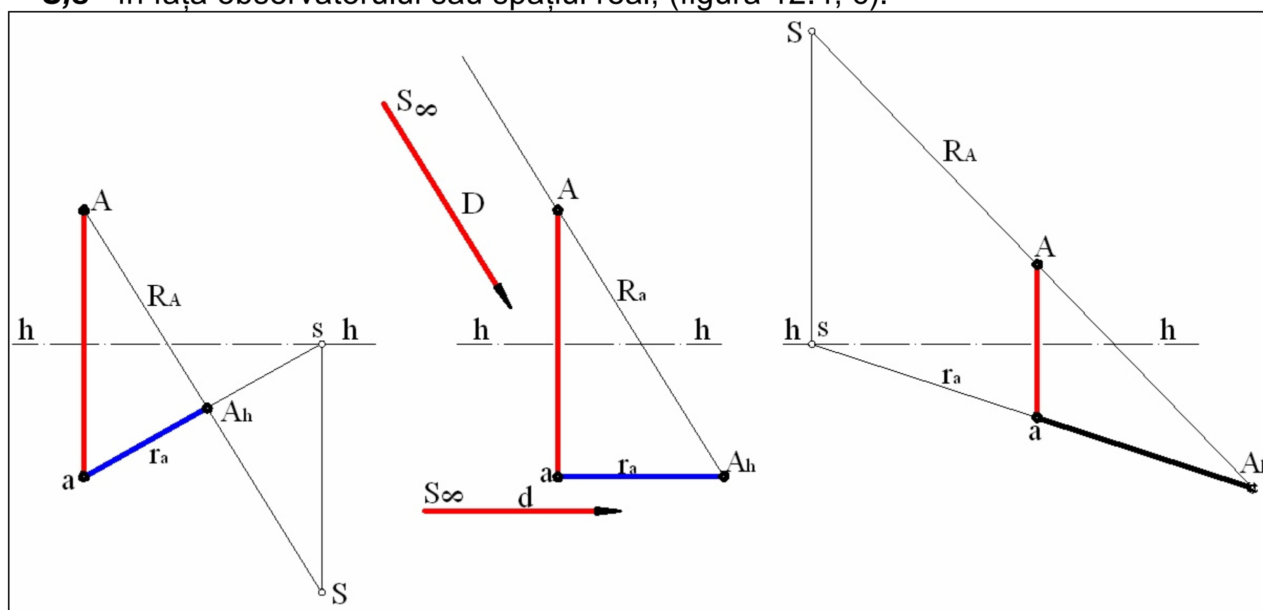


Fig.12.4. Umbra punctului A în perspectivă

În toate cazurile umbra punctului ***A,a*** pe planul orizontal de proiecte este punctul $\boldsymbol{A_h}$, rezultat din intersecția razei de lumină ***RA*** ce porneşte din sursa de lumină ***S*** şi trece prin punctul ***A*** cu proiecția ei orizontală $\boldsymbol{r_a}$ ce uneşte pe ***s*** cu ***a***. Umbra segmentului vertical ***Aa*** pe planul orizontal de proiecție este segmentul $\boldsymbol{aA_h}$.

Se observă că umbra verticalei pe planul orizontal de proiecție se îndepărtează, sau este îndreptată către observator după cum sursa de lumină ***S,s*** este în spatele observatorului, respectiv în fața lui (figura 12.4,a,c). Dacă sursa de lumină este în planul neutru, umbra verticalei pe planul orizontal de proiecție este paralelă cu linia orizontului (figura 12.4,b).

b. Umbra punctului şi dreptei verticale pe un plan vertical

Umbra unui punct pe un plan vertical este intersecția razei de lumină a punctului cu acel plan. Pentru determinarea punctului se intersectează proiecția orizontală $\boldsymbol{r_a}$ a razei de lumină $\boldsymbol{R_A}$ cu urma orizontală ***Ph*** a planului vertical, după care se ridică fie direct în spațiu pe raza de lumină $\boldsymbol{R_A}$ a punctului din spațiu în cazul perspectivei paralele (figura 12.5, a) sau perspectivei conice (figura 12.5, c), fie pe proiecția verticală $\boldsymbol{r^1_a}$ a razei de lumină în dubla proiecție ortogonală (figura 12.5,b).

Umbra segmentului vertical ***aA*** este alcătuită din linia frântă $\boldsymbol{aa_pA_p}$ în cazul perspectivei paralele sau conice şi din $\boldsymbol{aa_p}$, în proiecția orizontală şi $\boldsymbol{a^p_x\ a'_p}$ în proiecția verticală în cazul dublei proiecții ortogonale (figura 12.5,b).

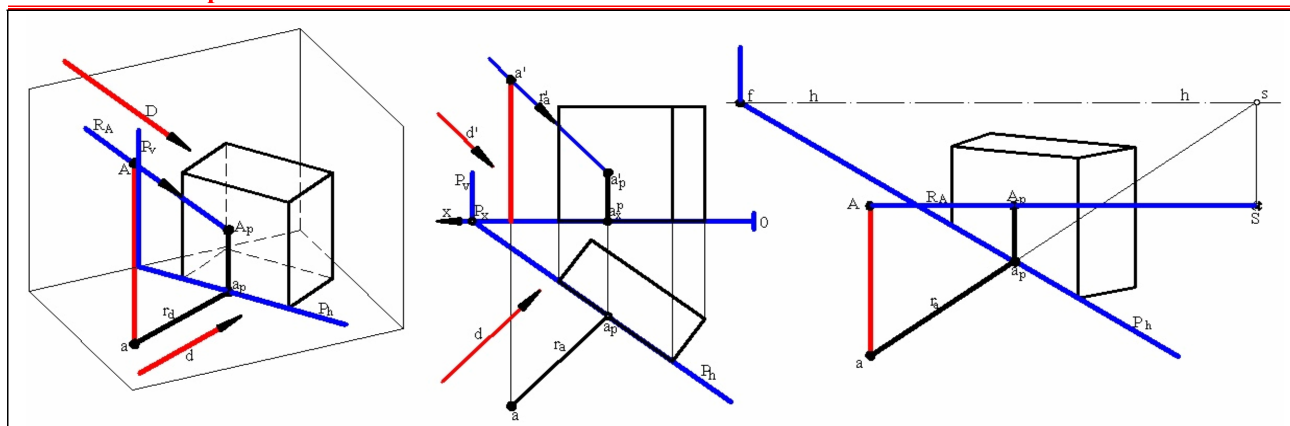


Fig.12.5. Umbra punctului A şi a dreptei Aa pe un plan vertical P

c. **Umbra punctului şi dreptei verticale pe un plan oarecare**

Pentru a construi umbra punctului ***A,a*** pe un plan oarecare ***R***, de exemplu planul înclinat al acoperişului unei clădiri (figura 12.6) se poate folosi umbra dreptei verticale ce trece prin acel punct.

Planul vertical ***Ph*** ce trece prin punctul ***A,a*** paralel cu ***D*** *(**Ph** paralel cu **d**)* secționează clădirea după linia poligonală ***1 - I - II - 2,*** punctele ***I*** şi ***II*** rezultând din ridicarea punctelor ***1*** şi ***2*** în care ***Ph*** intersectează proiecțiile orizontale ale marginilor acoperişului. Linia poligonală ***a - 1 - I - II*** este umbra verticalei nelimitată dusă prin punctul ***A,a.*** Raza de lumină ***RA*** din spațiu intersectează linia ***I—II*** în punctul A_r - umbra punctului pe acoperiş (figura 12.6, a,c).

În epură (figura 12.6,b) punctul a'_r se obține la intersecția proiecției verticale a razei de lumină r'_a cu linia ***1'2'*** care coboară apoi în a_r.

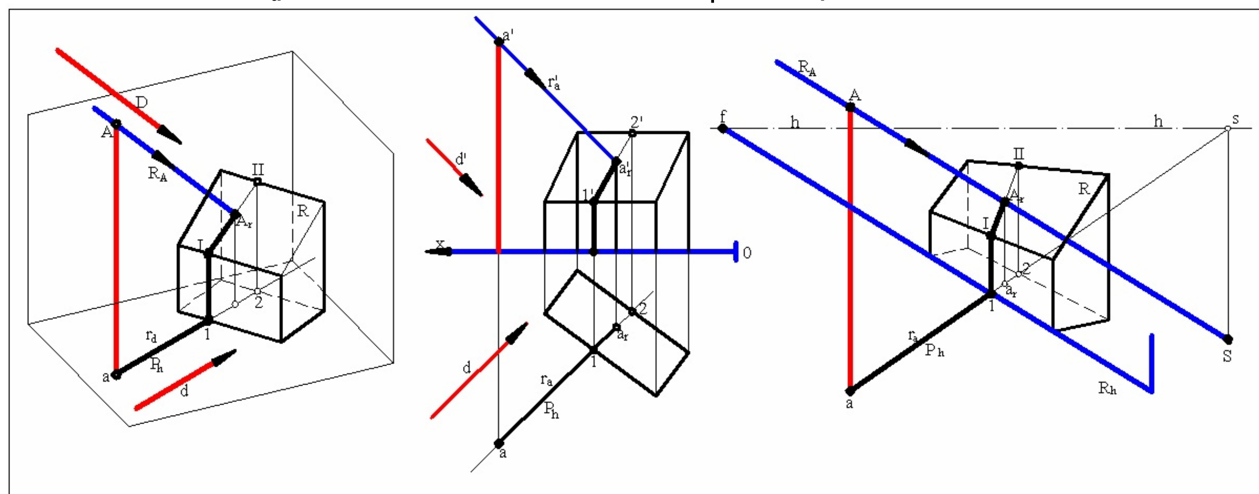


Fig.12.6. Umbra punctului A şi a dreptei Aa pe plan oarecare R

12. . 2. UMBRA DREPTEI

Totalitatea razelor de lumină ce trec prin sursa de lumină sau paralele cu direcția razelor de lumină şi se sprijină pe dreapta ***D,*** generează un plan numit planul de lumină al dreptei. Intersecția acestui plan cu orice suprafață este umbra purtată de dreaptă pe suprafața respectivă. Dacă umbra este purtată pe un plan, rezultă că

aceasta este tot o dreaptă şi deci poate fi construită prin umbrele purtate de două puncte ale dreptei pe plan.

La construirea umbrei purtate de o dreaptă pe un plan trebuie să se țină seama de următoarele:

- umbra reală a unei drepte pe un plan porneşte din punctul de intersecție al dreptei cu planul;
- orice dreaptă paralelă cu planul poartă umbră pe plan după o paralelă la aceasta;
- dacă o dreaptă poartă umbră pe mai multe plane concurente umbra de pe un plan se frânge pe celălalt plan într-un punct situat pe dreapta comună planelor numit *punct de frângere* ***k***.

12.3. UMBRA PARALELIPIPEDULUI

La volume trebuie construite două feluri de umbre:

- *umbre proprii,* partea întunecată de pe suprafața corpului, limitată de o linie ce poartă denumirea de *separatrice;*
- *umbre purtate* de corp pe alte corpuri. Umbra purtată este limitată de o linie de contur obținută prin umbra separatricei corpului.

În general, umbra proprie se intuieşte pentru corpuri cu fețe verticale, stabilindu-se separatricea corpului, iar umbra purtată de corp se obține determinînd conturul ei prin construirea umbrei purtate de separatricea corpului. Ca exemplu se prezintă umbra unui paralelipiped dreptunghic, volum întâlnit curent în arhitectură şi construcții.

Se consideră un paralelipiped dreptunghic ***ABCDabcd*** reprezentat în perspectiva paralelă (figura12.7,a) în dubla proiecție ortogonală (figura12.7,b) şi în perspectiva conică (figura 12.7,c). Ținând seama de direcția proiecției orizontale ***d*** a razelor de lumină, se observă că fețele verticale ***adDA*** ***şi*** ***cdDC*** sunt luminate, iar ***abBA*** şi ***bcCB*** întunecate. Cum raza de lumină din spațiu vine de deasupra clădirii, rezultă că fața orizontală superioară a clădirii ***ABCD*** este şi ea luminată. În acest caz separatricea paralelipipedului este linia poligonală ***aABCcda***. Pentru a construi umbra purtată de paralelipiped pe planul orizontal de referință este suficient să se construiască umbra separatricei corpului şi anume umbra purtată de verticala ***aA***, a orizontalelor ***AB*** şi ***BC*** şi apoi a verticalei ***Cc.*** Rezultă linia de contur a umbrei purtate $aA_hB_hC_hc$ în cazul perspectivei paralele şi conice şi $aa_hb\,c_h$ în dubla proiecție ortogonală.

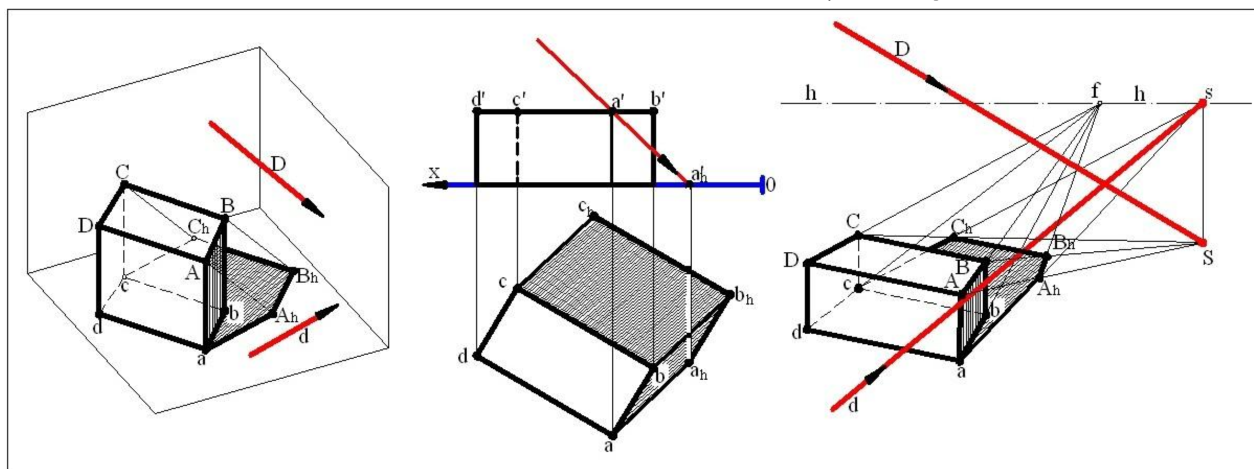


Fig. 12.7. Umbra paralelipipedului în axonometrie a), epură b) şi perspectivă c).

13. PROBLEME

13.1. PUNCTUL

PROBLEMA 1.
Se dau punctele: ***A (50, 65, 60), B (30,-20, 40), C (10,-30,-60), D (40, 30,-25).***
Să se reprezinte punctele în epură şi triedru.

PROBLEMA 2.
Se dau punctele: ***A (50, 60, 60), B (30,-40, 40), C (10,-50,-50), D (40, 25,-25).***
Să se reprezinte punctele în epură şi triedru.

PROBLEMA 3.
Se dau punctele:
H_1 (10, 25, 0), H_2 (20,-40, 0), V_1 (60, 0, 60), V_2 (10, 0,-20), L (0, 40, 50), M (50, 0, 0).
Să se reprezinte punctele în epură şi triedru.

PROBLEMA 4.
Se se deseneze în epură şi triedru câte un punct aflat în planele de proiecție.
Să se specifice coordonatele.

PROBLEMA 5.
Se se deseneze în epură şi spațiu câte un punct aflat în primele patru triedre de proiecție.
Să se specifice coordonatele.

PROBLEMA 6.
Se se deseneze în epură şi spațiu câte un punct aflat în ultimele patru triedre de proiecție.
Să se specifice coordonatele.

13.2.DREAPTA

PROBLEMA 1.
Să se construiască în triedru şi epură o dreaptă de nivel ***N (n, n',n'')*** şi o dreaptă frontală ***F (f, f', f'').*** Desenați câte un punct de coordonate alese, de pe cele două drepte.

PROBLEMA 2.
Să se construiască epura dreptei ***AB*** în triplă proiecție ortogonală definită de punctele ***A (40, 10, 15)*** şi ***B (15, 25, 25).***
Să se determine urmele dreptei, intersecția cu planele bisectoare şi diedrele pe care le străbate.

PROBLEMA 3.
Se dau punctele: ***A (60, -65, -10)*** şi ***B (15, 55, 35).***
Să se determine diedrele şi octanții prin care trece dreapta ***AB*** şi apoi proiecția laterală a dreptei.

PROBLEMA 4.
Se dau punctele: ***A (60, 65, -15)*** şi ***B (20, -35, 45).*** Să se determine diedrele şi octanții prin care trece dreapta ***AB*** şi apoi proiecția laterală a dreptei.

PROBLEMA 5.
Se dau punctele: ***A (50, 65, -15)*** şi ***B (50, -35, 45).***
Să se determine diedrele şi octanţii prin care trece dreapta ***AB*** şi apoi proiecţia laterală a dreptei.

PROBLEMA 6.
Se dau punctele: ***A (40, 20, 26)*** şi ***B (40, 50, 43).***
Să se construiască în epură segmentul ***AB***.
Să se determine urmele dreptei ***AB*** şi intersecţiile dreptei cu planele bisectoare.

PROBLEMA 7.
Se dau punctele: ***A (35, 40, 30)*** şi ***B (35, -40, 30).***
Să se determine urma verticală a dreptei, intersecţiile ei cu planele bisectoare şi octanţii prin care trece dreapta.

PROBLEMA 8.
Se dă punctul: ***A (50, 20, 35).***
Să se reprezinte orizontala ce trece prin punctul ***A*** şi face un unghi de ***30°*** cu planul vertical de proiecţie. Să se reprezinte şi frontala ce trece prin acelaşi punct şi face un unghi de ***45°*** cu planul orizontal de proiecţie.

PROBLEMA 9.
Se dau punctele : ***A (35, 30, 10), B (55, 10, 60), C (35, 45, 35), H (55, 25, 0).***
Să se reprezinte dreptele ***AH*** şi ***BC*** în cele trei proiecţii şi să se stabilescă în ce poziţie sunt una faţă de cealaltă. Vizibilitatea dreptelor.

PROBLEMA 10.*(2P)*
Se dau punctele: ***A (20, 50, 60), V (80, 0, 20), H (100, 50, 0).***
Să se reprezinte orizontala ce face unghi de ***30°*** cu planul vertical de proiecţie şi care se sprijină pe verticala punctului ***H*** şi pe dreapta ***AV.***

PROBLEMA 11.*(2P)*
Se dau punctele: ***A (10, 40, 30), V (85, 0, 15), M (95, 45, 65), H (120, 60, 0).***
Să se reprezinte dreapta ce trece prin punctul ***M,*** se sprijină pe dreapta ***AV*** şi face unghi de *90°* cu frontala punctului ***H***, înclinată la ***45°*** faţă de planul orizontal de proiecţie.

PROBLEMA 12.
Se dau punctele: ***A (30, 35, 60), V (65, 0, 25), H (10, 65, 0), M (10, 25, 65), L (0, 40, 15).***
Să se reprezinte dreapta paralelă cu dreapta de profil ***HM*** şi care se sprijină pe drepta ***AV*** şi pe fronto-orizontala punctului ***L.***

PROBLEMA 13.
Se dau punctele: ***A (15, 30, 30), V (55, 0, 10), B (35, 55, 30), W (35, 0, 65).***
Să se stabilească poziţia dreptei ***AV*** faţă de dreapta ***BW*** şi vizibilitatea lor.

PROBLEMA 14.
Se dau punctele: ***A (25, 25, 20), B (25, 15, 10), C (45, 10, 65), D (45, 20, 45).***
Să se stabilească poziţia relativă a dreptelor ***AB şi CD.***

13.3. PLANUL

PROBLEMA 1.
Se dau punctele: ***A (10, 15, 35), B (20, 30, 8), C (30, 15, 15).***
Să se determine urmele planului ***ABC*** pe cele trei plane de proiecție.

PROBLEMA 2.
Se dau punctele: ***A (95, 0, 0), B (35, 30, 30), C (35, 13, 50).***
Să se determine urmele planului ***ABC*** pe cele trei plane de proiecție.

PROBLEMA 3. *(2P)*
Se dau punctele: ***A (55, 25, 25), V (40, 0, 60).*** Să se determine urmele planului dat prin dreapta ***AV*** ca linie de cea mai mare pantă față de planul orizontal de proiecție. Să se reprezinte dreptele particulare ale planului duse prin punctul ***A*** (orizontala, frontala şi linia de cea mai mare pantă față de planul vertical de proiecție).

PROBLEMA 4. *(2P)*
Se dau punctele: ***A (35, 15, 60), B (110, 0, 0), C (55, 30, 20).*** Să se determine proiecțile punctului ***M*** de cotă ***30 mm*** şi depărtare ***20 mm*** ce aparține planului ***ABC***.

PROBLEMA 5.
Se dau punctele: ***A (20, 40, 25), M (50, 30, ?).*** Să se reprezinte urmele planului paralel cu ***Ox*** care trece prin punctul ***A*** şi face unghi de ***60^o*** cu planul orizontal de proiecție. Să se determine cele trei proiecții ale punctului ***M*** ce aparține acestui plan.

PROBLEMA 6.
Se dau punctele: ***A (100, 50, 60), B (50, 45, 40), V (90, 0, 40), M (35, 25, ?).***
Să se determine proiecția verticală a punctului ***M*** care aparține planului dat prin punctul ***A*** şi orizontala ***BV***.

PROBLEMA 7. *(2P)*
Se dau punctele: ***A (55, 60, 20), V (70, 0, 40), Px (115, 0, 0), M (30, 20, 40).***
Să se determine urmele planului ce trece prin ***M*** şi este paralel cu planul dat prin punctele ***A, V şi Px.***

PROBLEMA 8. *(2P)*
Se dau punctele: ***A (40, 10, 20), B (20, 30, 5), Px (65, 0, 0), Rx (100, 0, 0), H (65, 60, 0), V (65, 0, 25).***
Se cere intersecția planului ***VRxH*** cu planul determinat de punctele ***A, B*** şi ***Px.***

PROBLEMA 9.
Se dau punctele: ***Px*** = Rx ***(85, 0, 0), H (120, 60, 0), V (50, 0, 35), H_1 (120, 25, 0), V_1 (120, 0, 50), A (50, 20, 20).***
Să se ducă prin punctul ***A*** un plan paralel cu planul ***V_1RxH_1*** şi apoi să se intersecteze acest plan cu planul ***V Px H.***

PROBLEMA 10. *(2P)*
Se dau punctele: ***H (0, 60, 0), V(0, 0, 55), Px (60, 0, 0), A (40, 65, 40).***
Se cere intersecția planului ***HPxV*** cu planul determinat de punctul ***A*** şi de linia de pământ ***Ox.***

PROBLEMA 11. *(2P)*
Se dau punctele: ***A (115, 50, 65), B (65, 40, 25), H (90, 20, 0), M (10, 25, 25), V (40, 0, 70),*** H_1 ***(25, 65, 0).*** Prin punctul H_1 se duce o paralelă la dreapta ***MV***.
Să se determine dreapta de intersecție dintre planele date prin cele două drepte paralele şi dreptele concurente ***AB*** şi ***AH.***

PROBLEMA 12.
Se dau punctele: ***H (40, 30, 0), V (40, 0, 60),*** V_1 ***(40, 0 20).***
Să se determine dreapta de intersecție dintre planul ce trece prin punctele ***H*** şi ***V*** şi este paralel cu ***Ox*** cu planul dus prin punctul V_1 paralel cu planul bisector I.

PROBLEMA 13. *(2P)*
Se dau punctele:
H (105, 35, 0), Px (120, 0, 0), V (90, 0, 30), Rx (35, 0, 0), W (60, 0, 30), A (40, 40, 35).
Să se ducă prin punctul ***A*** dreapta paralelă cu planele determinate de punctele ***H, Px, V*** respectiv ***H, Rx, W.***

PROBLEMA 14. *(2P)*
Se dau punctele:
A (100, 45, 50), B (55, 5, 10), C (25, 60, 65), M (35, 70, 30), V (110, 0, 60).
Să se determine punctul de intersecție al dreptei ***MV*** cu placa triunghiulară ***ABC*** şi vizibilitatea.

PROBLEMA 15. *(2P)*
Se dau punctele: ***A (80, 40, 25),*** V_1 ***(25, 0, 65),*** V_2 ***(115, 0, 50), Px(75, 0, 0), H (0, 40, 0).***
Să se determine punctul de intersecție ai dreptei AV_1 cu planul dat prin punctele ***V2, Px*** şi ***H***. Vizibilitatea.

PROBLEMA 16. *(2P)*
Se dau punctele: ***A (120, 60, 20), V (45, 0, 20), H (15, 40, 0),*** H_1 ***(45, 70, 0),*** V_1 ***(45, 0, 50), Px (120, 0, 0).*** Să se reprezinte dreapta din planul H_1 ***Px*** V_1 şi care se sprijină pe drepta ***AV*** şi verticala punctului ***H.***

PROBLEMA 17. *(2P)*
Se dau punctele: ***A (15, 65, 15), V (35, 0, 55), H (85, 30, 0), M (60, 65, 50)***.
Să se reprezinte în dubla proiecție ortogonală perpendiculara coborâtă din punctul ***M*** pe planul determinat de punctele ***A, H*** şi ***V*** şi apoi să se intersecteze cu acest plan.

PROBLEMA 18.
Se dau punctele: ***A (50, 30, 40), V (20, 0, 10), Py (0, 30, 0), Pz (0, 0, 70).***
Să se determine punctul de intersecție al dreptei ***AV*** cu planul ce trece prin punctele ***Py*** şi ***Pz*** şi este paralel cu ***Ox.***

PROBLEMA 19.
Să se construiască un pătrat cu latura ***AB*** de ***20*** mm într-un plan paralel cu ***Ox,*** definit de ***Pz (0, 0, 45) , A(60, 30, 30)*** şi unghiul de 45^o cu planul orizontal de proiecție.

PROBLEMA 20.
Să se construiască un poligon oarecare cu şapte laturi aşezat într-un plan de nivel definit de ***Pz (0, 0, 50).***

13.4. POLIEDRE

PROBLEMA 1. *(2D)*
Se dau punctele:
A (70, 5, 15), B (20, 5, 60), C (30, 65, 10), S (100, 50, 60), M (75, 35, ?).
Să se determine vizibilitatea muchiilor piramidei ce are ca bază poligonul ***ABC*** şi vârful în punctul ***S***, apoi să se construiască proiecțiile verticale ale punctului ***M*** ca să aparțină fețelor laterale ale piramidei.

PROBLEMA 2. *(2D)*
Se dau punctele**:** ***A (89, 10, 25), B (105, 17, 46).***
Să se reprezinte prisma hexagonală regulată cu baza în planul de capăt de latură ***AB***, iar înălțimea egală cu latura poligonului de bază.

PROBLEMA 3. *(2D)*
Se dau punctele: ***A (57, 7, 24), B (40, 40, 9).***
Să se reprezinte piramida regulată dreaptă cu baza un pătrat de latură ***AB*** situat în planul vertical ce trece prin ***AB*** şi vârful în punctul ***S*** la distanța ***75*** mm de bază.

PROBLEMA 4. *(2D)*
Se dau punctele: ***A (125, 35, 0), B (110, 10, 0), C (80, 5, 0), D (65, 40, 0), E (100, 60, 0), M (45, 65, 70), Px (0, 0, 0), H (60, 60, 0), V (60, 0, 60).***
Se cere secțiunea cu planul ***HPxV*** în prisma ce are ca bază poligonul ***ABCDE***, iar muchiile paralele cu dreapta ***AM***.

PROBLEMA 5. *(2D)*
Se dau punctele: ***A (110, 30, 0), B (80, 10, 0), C (60, 25, 0), D (73, 50, 0), V (60, 0, 35), Px (0, 0, 0), H (60, 55, 0).***
Se cere secțiunea cu planul ***VPxH*** în prisma verticală ce are ca bază poligonul ***ABCD.***

PROBLEMA 6.
Se dau punctele:
A (60, 50, 0), B (40, 5, 0), C (5, 30, 0), S (20, 65, 60), Py (0, 60, 0), Pz (0, 0, 50).
Să se determine secțiunea cu planul ce trece prin punctele ***Py*** şi ***Pz*** şi este paralel cu linia ***Ox*** în piramida ce are ca bază poligonul ***ABC*** şi vârful în punctul ***S***.

PROBLEMA 7. *(2D)*
Se dau punctele: ***A (120, 50, 0), B (70, 0, 0), C (40, 65, 0), S (15, 10, 60), M (80, 70, 35), V (20, 0, 10).***
Se cere intersecția dreptei ***MV*** cu piramida ce are ca bază poligonul ***ABC*** şi vârful în punctul ***S.***

PROBLEMA 8. *(2D)*
Se dau punctele: ***A (80, 0, 30), 6(55, 0, 70), C (35, 0, 35), E (0, 35, 25), M (75, 35, 15), V (0, 0, 40).*** Se cere intersecția dreptei ***MV*** cu prisma ce are ca bază poligonul ***ABC***, iar muchiile paralele cu ***BE.***

PROBLEMA 9.
Se dau punctele: ***A (0, 60, 50), B (0, 40, 65), C (0, 5, 35), D (0, 40, 20), S (55, 35, 40), H (15, 45, 0).***
Să se determine punctele de intersecție ale dreptei verticale ce trece prin punctul ***H*** cu piramida ce are ca bază poligonul ***ABCD*** şi vârful în punctul ***S***.

13.5. CORPURI ROTUNDE

PROBLEMA 1.
Se dau punctele: ***O (30, 32, 22), Py (0, 70, 0).***
Să se reprezinte cilindrul circular drept ce are ca bază cercul din planul paralel cu ***Ox*** ce trece prin punctele ***O*** şi ***Py*** cu centrul în punctul ***O*** şi raza ***20 mm,*** iar înălțimea ***35 mm.***

PROBLEMA 2. *(2P)*
Se dau punctele*:* ***O (40, 0, 40), A (30, 0, 57), S (5, 30, 5).***
Să se reprezinte pe cele trei plane de proiecție conul circular oblic ce are ca bază cercul din planul vertical de proiecție de centru ***O*** şi raza ***OA***, iar vârful în punctul ***S***.
Considerând un punct ***M*** de cota ***30 mm*** situat pe generatoarea ***SA*** să se determine în triplă proiecție ortogonală proiecțiile punctului.

PROBLEMA 3. *(2P)*
Se dau punctele: ***O (70, 30, 0), M (30, 55, 60), A (60, ?, 38).***
Să se reprezinte în dublă proiecție ortogonală cilindrul ce are ca bază cercul de nivel de centru ***O*** şi raza ***20 mm,*** iar generatoarele paralele cu ***OM.***
Să se reprezinte punctul ***A*** situat pe suprafața cilindrică şi să se determine urmele planului tangent într-unul din cele două puncte obținute.

PROBLEMA 4.
Se dau punctele: ***O (95, 35, 0), S (95, 35, 65), Px (75, 0, 0).***
Se cere secțiunea după parabolă cu planul de capăt ce trece prin punctul ***Px*** în conul de rotație ce are ca bază cercul de nivel de centru ***O*** şi raza ***30 mm***, iar vârful în punctul ***S***. Adevărata mărime a secțiunii prin rabaterea planului de capăt pe ***H.***

PROBLEMA 5.
Se dau punctele: ***O (0, 40, 40), Px (0, 0, 0), H (20, 50, 0), V (20, 0, 30).***
Se cere secțiunea cu planul ***H*** P_X ***V*** în cilindrul circular drept cu baza cercul de profil situat în planul lateral de centru ***O*** şi raza ***15 mm.***

PROBLEMA 6. *(2P)*
Se dau punctele: ***O (80, 0, 40), S (10, 30, 0), Px (0, 0, 0), H (80, 20, 0).***
Se cere secțiunea cu planul vertical ce trece prin punctele ***H*** şi ***Px*** în conul ce are ca bază cercul din planul vertical de proiecție de centru ***O*** şi raza ***30 mm***, iar vârful în punctul ***S.***

PROBLEMA 7. *(2P)*
Se dau punctele: ***O (80, 35, 0), M (20, 45, 50), A (20, 55, 20).***
Să se determine punctele de intersecție ale dreptei fronto-orizontale care trece prin punctul ***A,*** cu cilindrul ce are ca bază cercul de nivel de centru ***O*** şi raza ***25 mm***, iar generatoarele paralele cu ***OM.***

PROBLEMA 8. *(2P)*
Se dau punctele: ***O (50, 0, 25), M (80, 42, 65), A(80, 32, 57), V(115, 0, 67).***
Să se determine punctele de intersecție ale dreptei ***AV*** cu cilindrul ce are ca bază cercul frontal de centru ***O*** şi raza ***20 mm***, iar generatoarele paralele cu dreapta ***OM.***

13.6. INTERSECȚII DE CORPURI

PROBLEMA 1. *(2P)*
Se dau punctele: ***A (0, 85, 0), B (55, 5, 0), C (95, 140, 0), S (133, 0, 120), M (95, 93, 0), N (153, 110, 0), P (137, 155, 0), V (55, 0, 80).***
Se cere intersecția prismei ce are ca bază poligonul ***MNP***, iar muchiile paralele la dreapta ***MV****,* cu piramida ce are ca bază poligonul ***ABC***, iar vârful în punctul ***S****.*

PROBLEMA 2. *(2P).*
Se dau punctele: ***O_1 (145, 115, 0), O_2 (58, 75, 0), V (115, 0, 94), M (190, 0, 100).***
Se cere intersecția cilindrului ce are ca bază cercul de nivel de centru ***O_1*** şi rază ***36 mm***, iar generatoarele paralele cu ***O_1V*** cu cilindrul ce are ca bază cercul de nivel de centru ***C_2*** şi raza ***43 mm***, iar generatoarele paralele cu dreapta ***O_2M***. Tangenta într-un punct curent.

PROBLEMA 3.
Se dau punctele: ***O_1 (50, 0, 0), O_2 (0, 50, 0).***
Să se determine curba de intersecție dintre semicilindrul de capăt ce are ca bază semicercul din planul vertical superior de proiecție, de centru ***O_1*** şi rază ***35 mm*** cu semicilindrul fronto-orizontal ce are ca bază semicercul din planul lateral superior de proiecție, de centru ***O_2*** şi raza ***35 mm.***

PROBLEMA 4.
Se dau punctele: ***O_1 (50, 0, 0), O_2 (0, 50, 0).***
Să se determine curba de intersecție dintre semicilindrul de capăt ce are ca bază semicercul din planul vertical superior de proiecție de centru ***O_1*** şi rază ***30 mm***, cu semicilindrul fronto-orizontal ce are ca bază semicercul din planul lateral superior de proiecție, de centru ***O_2*** şi rază ***35 mm.***

PROBLEMA 5. *(2P).*
Se dau punctele: ***O (150, 60, 0), A (60, 0, 0).***
Să se determine curba de intersecție dintre cilindrul vertical ce are ca bază cercul de nivel de centru ***O*** şi raza ***30 mm***, cu semicilindrul orizontal circular drept ce are raza cercului de bază (secțiunea dreaptă) de ***30 mm*** şi axul longitudinal ***OA.***

PROBLEMA 6.
Se dau punctele: ***O (50, 0, 0), S (50, 95, 0), O_1 (0, 35, 0).***
Să se determine curba de intersecție dintre semiconul ce are ca bază semicercul din planul vertical superior de proiecție de centru ***O*** şi rază ***40 mm***, iar vârful în ***S***, cu semicilindrul fronto-orizontal ce are ca bază semicercul din planul lateral superior de proiecție de centru ***O*** şi rază ***25mm.***

13.7. AXONOMETRIE

PROBLEMA 1.
Să se reprezinte în axonometria oblică izometrică şi dimetrică un ansamblu de corpuri geometrice rezultat din suprapuneri de prisme, piramide sau trunchiuri de piramide.
PROBLEMA 2.
Să se reprezinte în axonometria ortogonală izometrică, corpurile geometrice rezultate din suprapuneri şi alăturări de cilindri, conuri şi trunchiuri de con.

13.8. DESFĂŞURĂRI, SECŢIUNI

Problemele 1, 2.
Să se deseneze epura şi desfăşuratele corpurilor din tema 1 şi 2, conform modelelor alăturate (figurile 13.1 - 13.3).
Problemele 3, 4, 5, 6.
Să se rezolve în epură şi proiecţia care lipseşte la corpurile secţionate din tema 3 - 6.

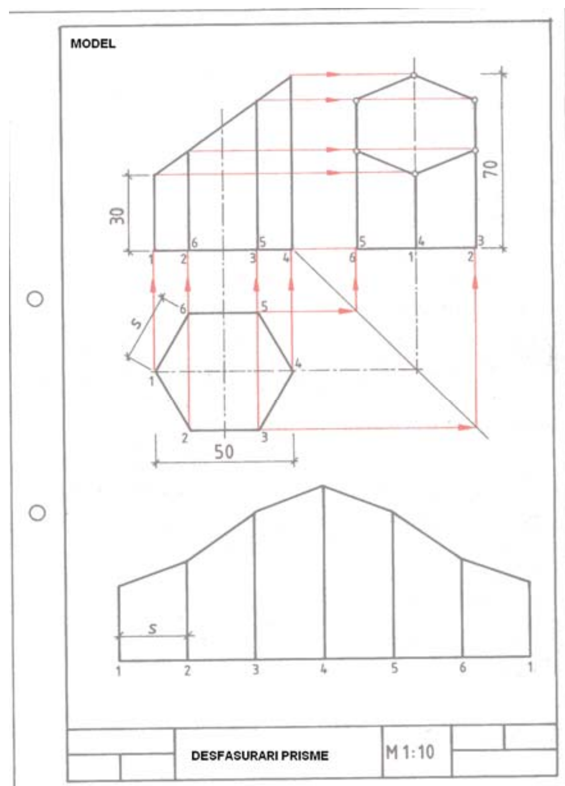


Fig.13.1. Desfăşurare prismă

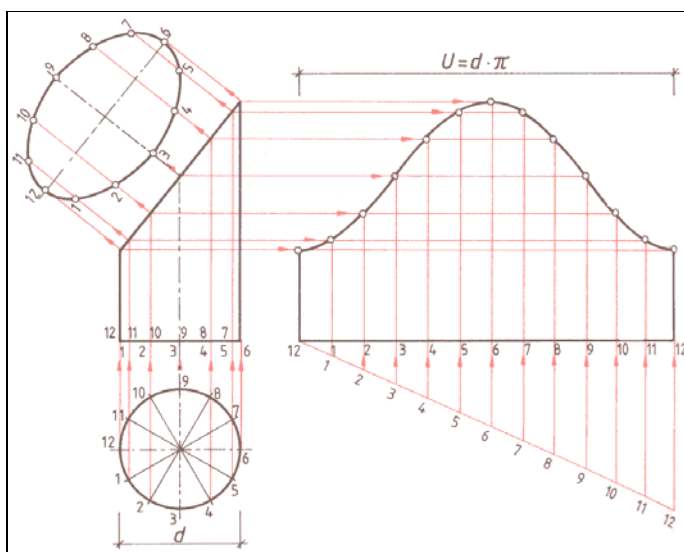


Fig.13.2. Desfăşurare cilindru

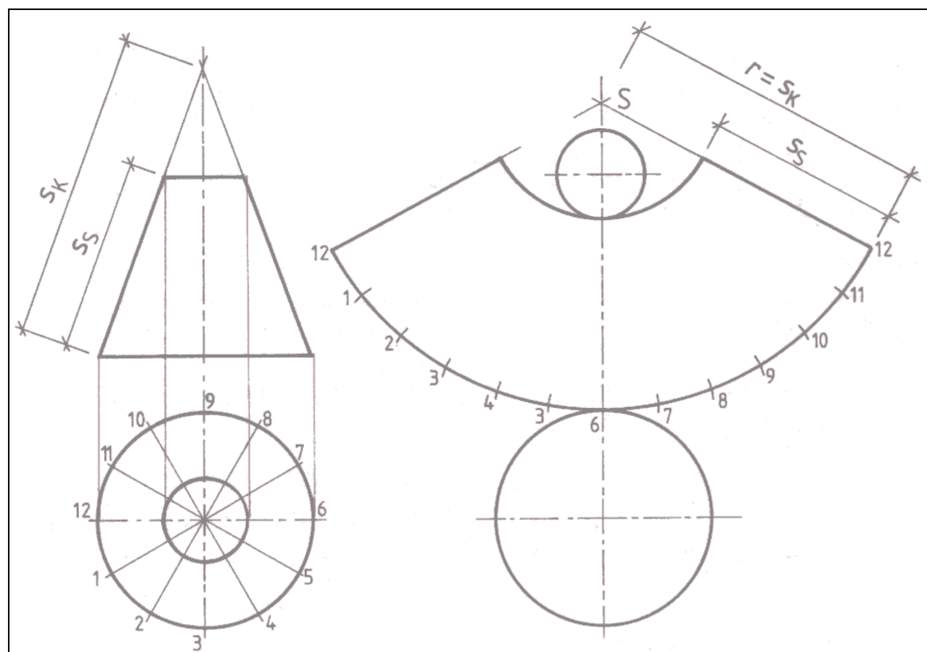
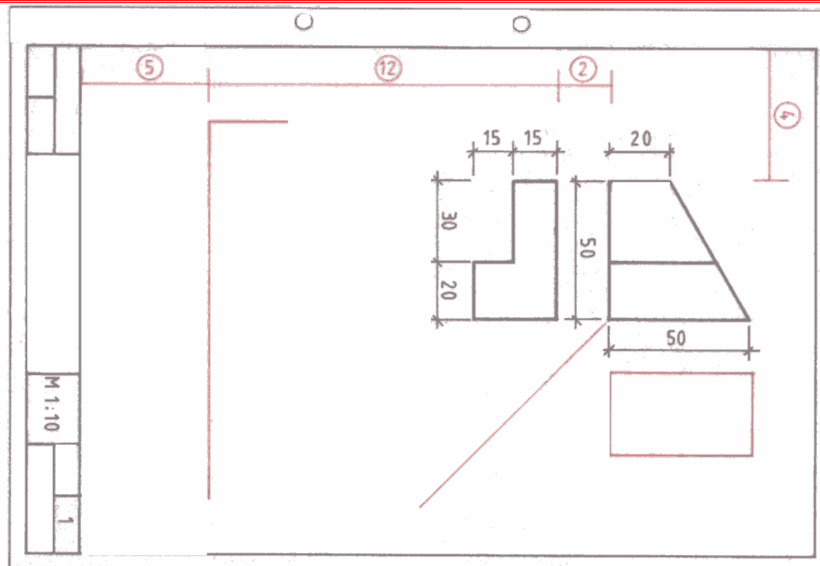
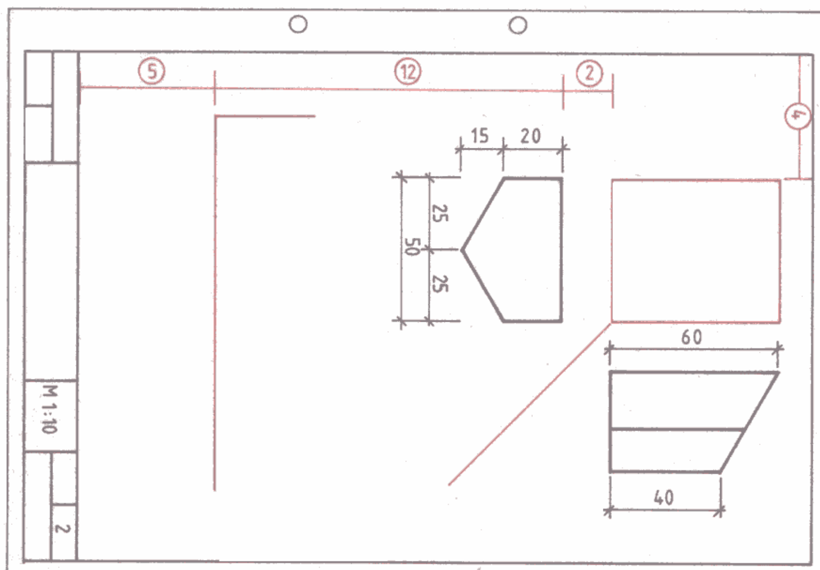
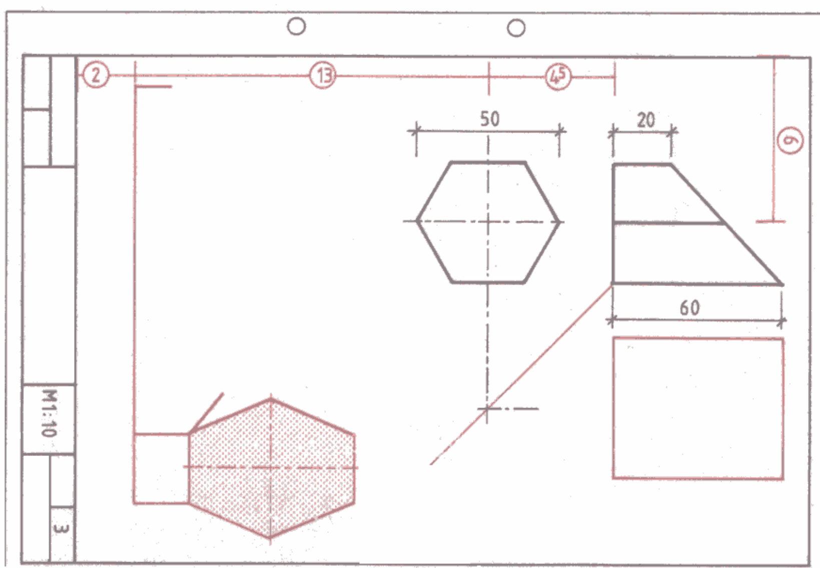


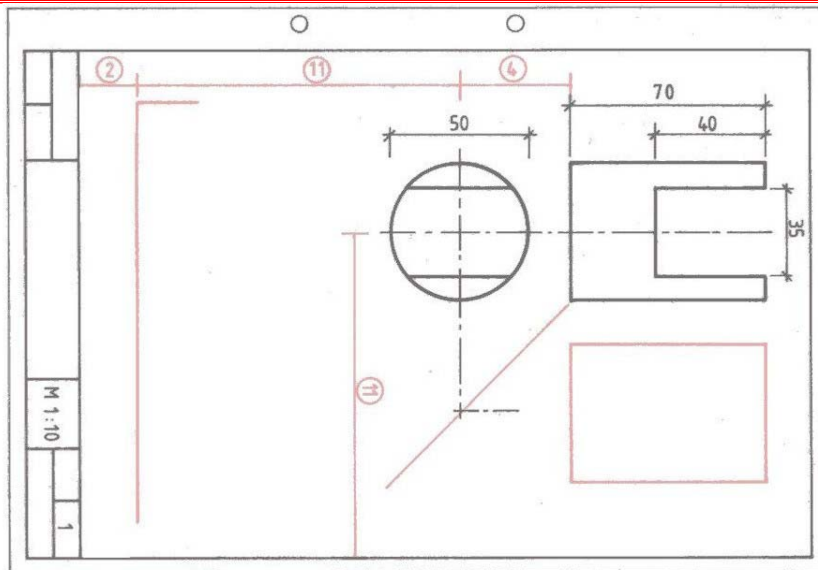
Fig.13.3. Desfăşurare trunchi de con

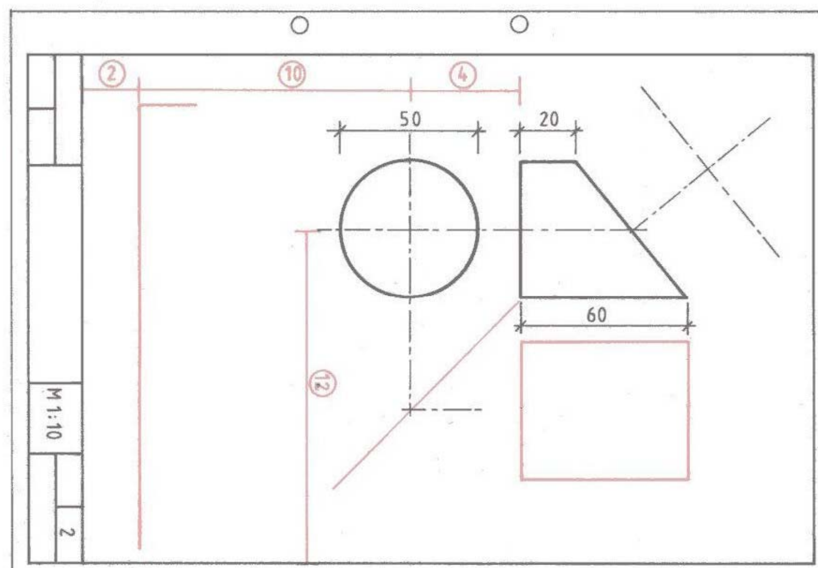

5
12
2
4
15
15
20
30
20
50
50
M 1:10
1

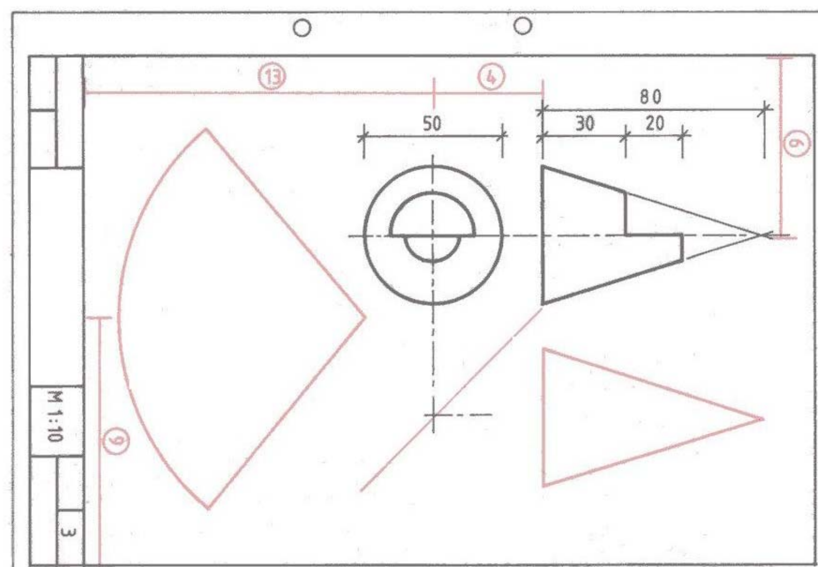

5
12
2
4
15
20
25
50
25
60
40
M 1:10
2


2
13
4,5
6
50
20
60
M1:10
3

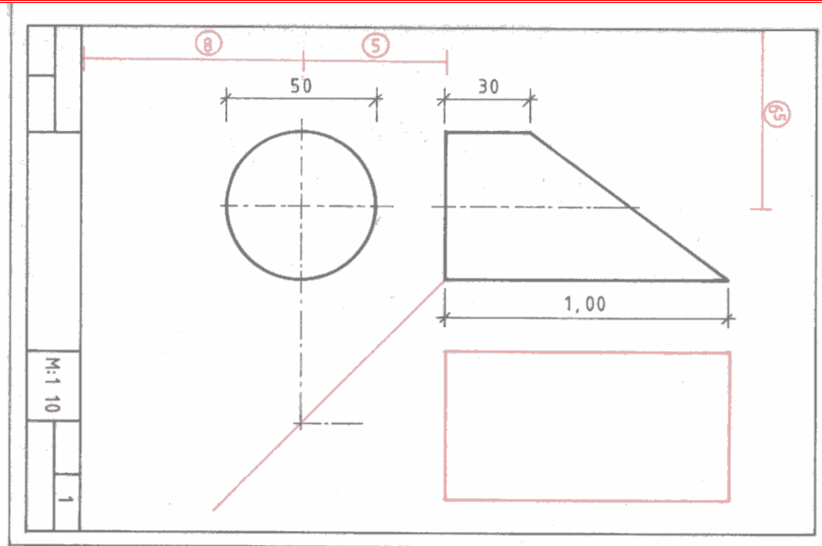
Tema 1.

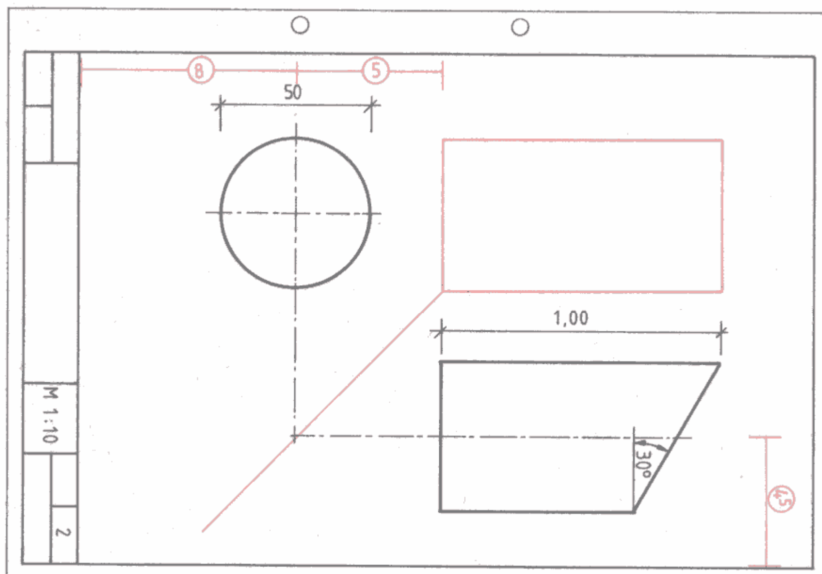

2
11
4
70
50
40
35
M 1:10
11
1

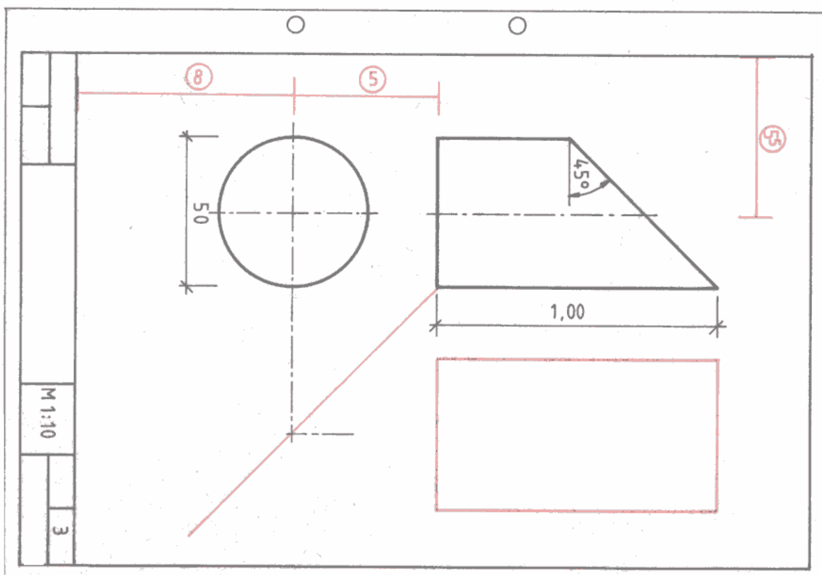

2
10
4
50
20
60
12
M 1:10
2


13
4
80
50
30
20
6
M 1:10
9
3

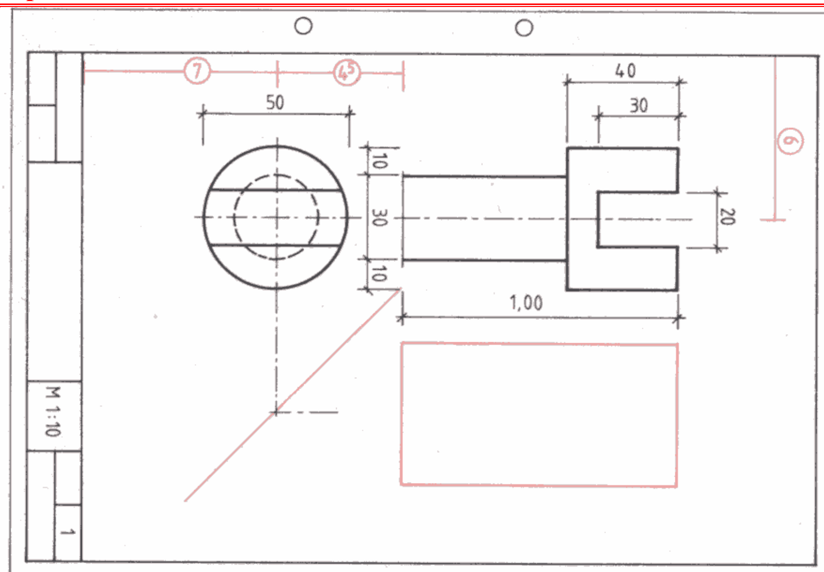
Tema 2.



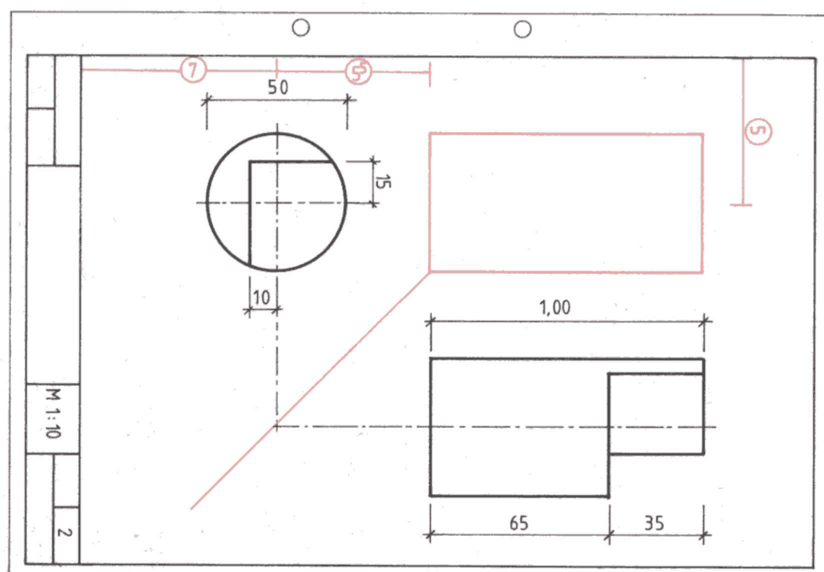




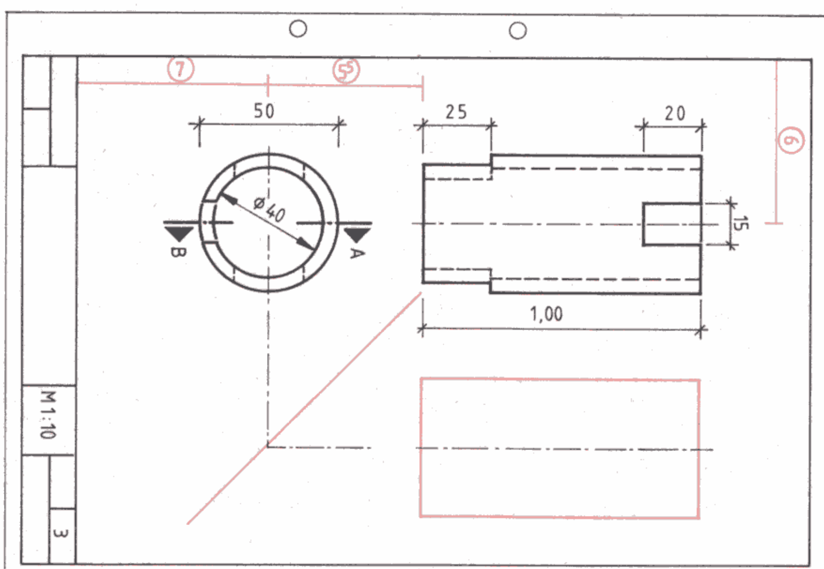
Tema 3.



7
4,5
50
40
30
6
10
30
10
20
1,00
M 1:10
1

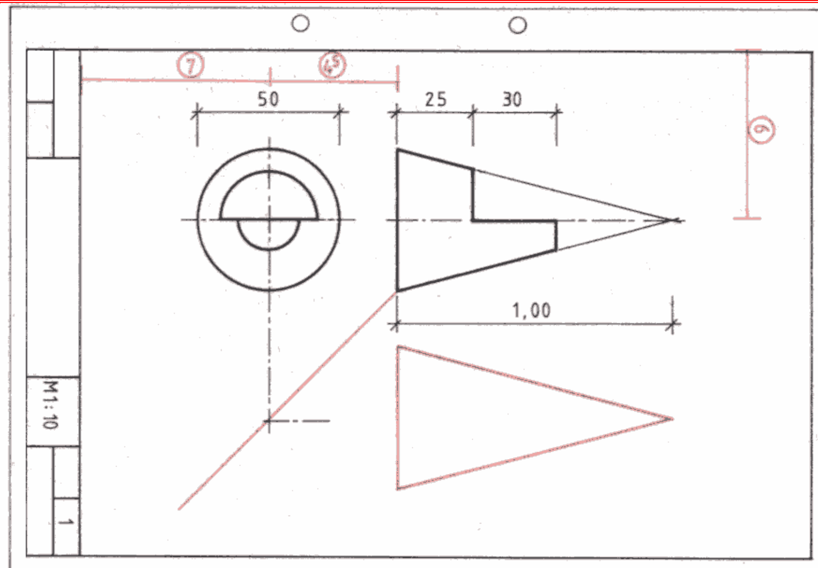


7
5,5
50
5
15
10
1,00
M 1:10
2
65
35

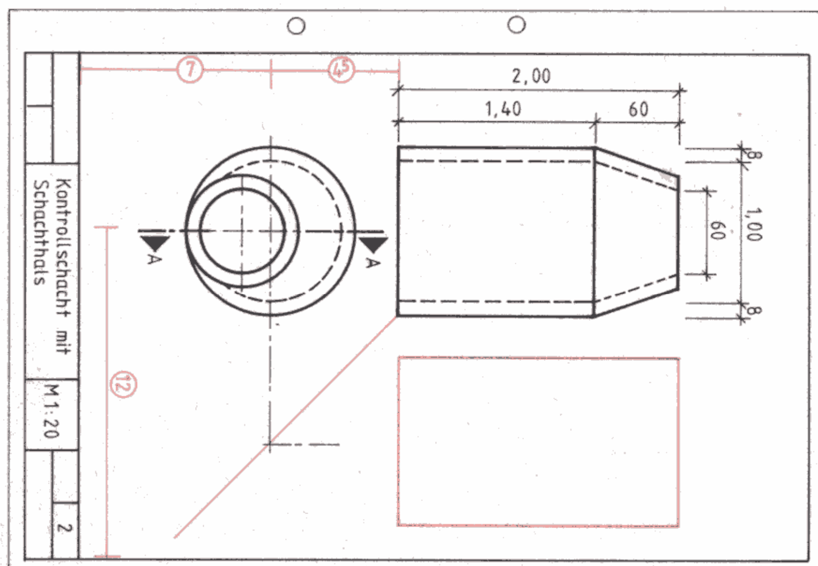


7
5,5
50
25
20
6
ø40
B
A
15
1,00
M 1:10
3

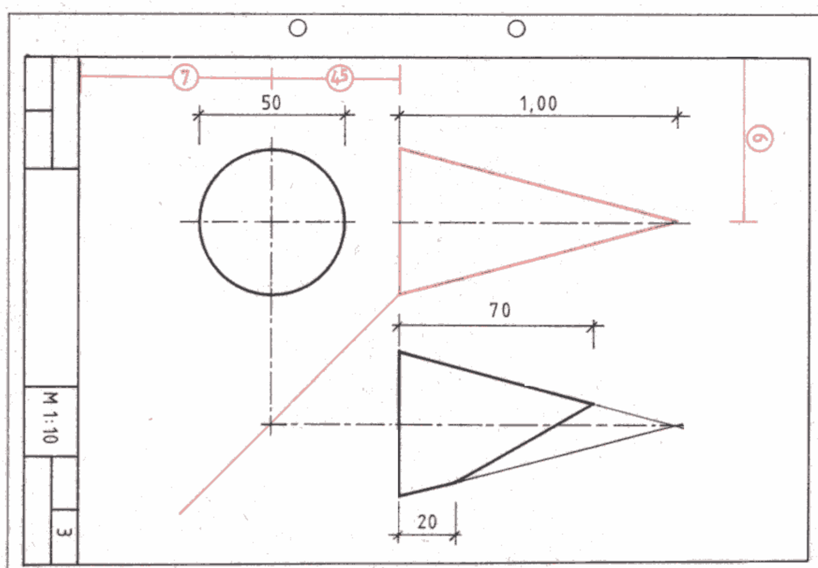
Tema 4.



7
45
50
25
30
6
1,00
M1:10
1

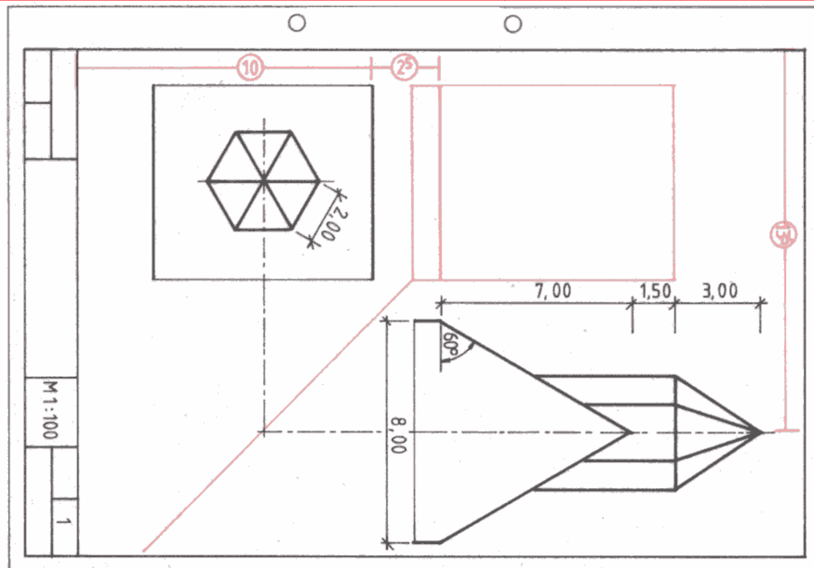


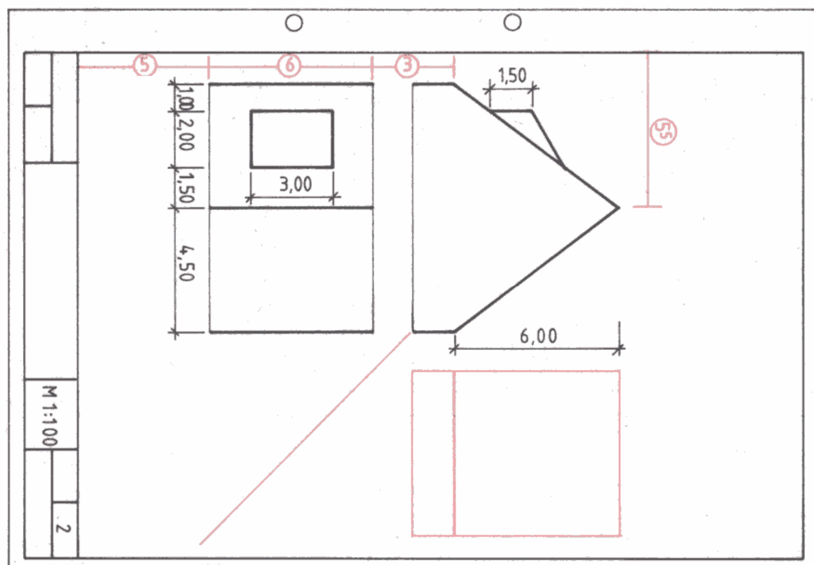
7
45
2,00
1,40
60
8
60
1,00
8
A
A
Kontrollschacht mit Schachthals
12
M1:20
2

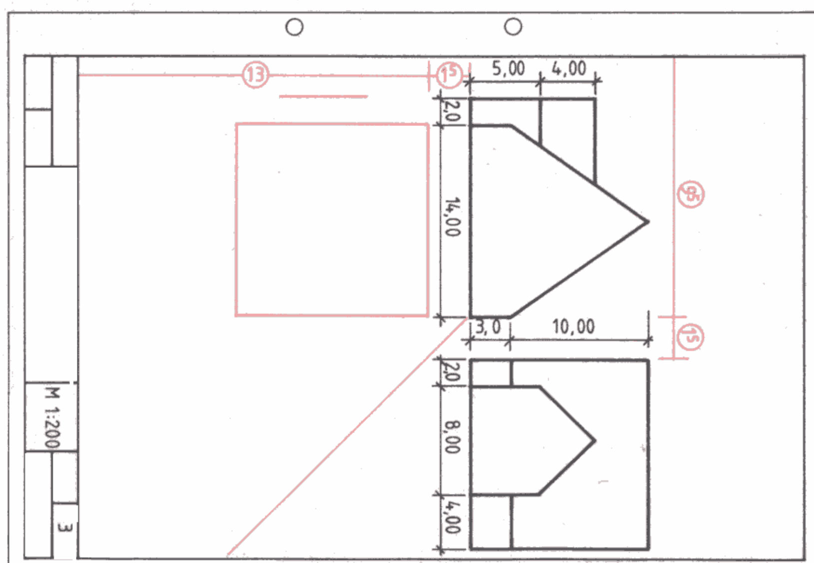


7
45
50
1,00
6
70
20
M 1:10
3

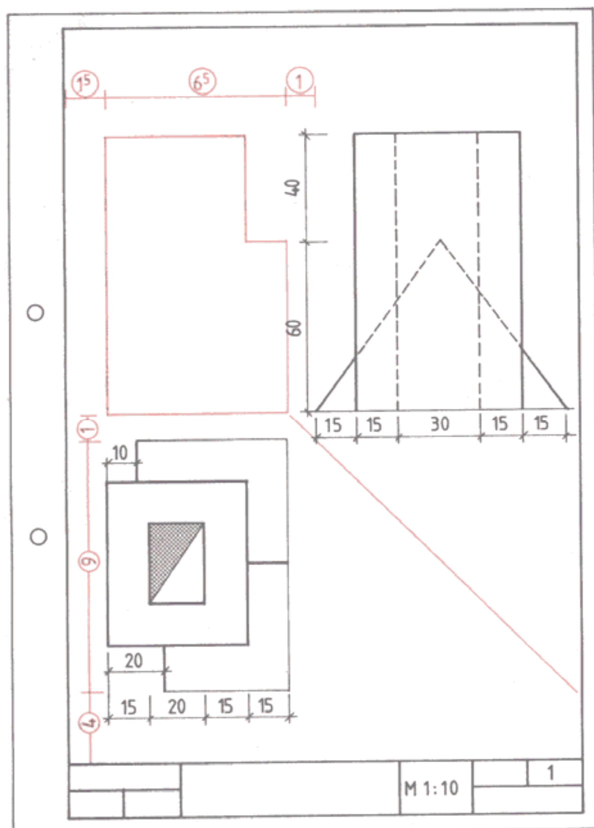
Tema 5.

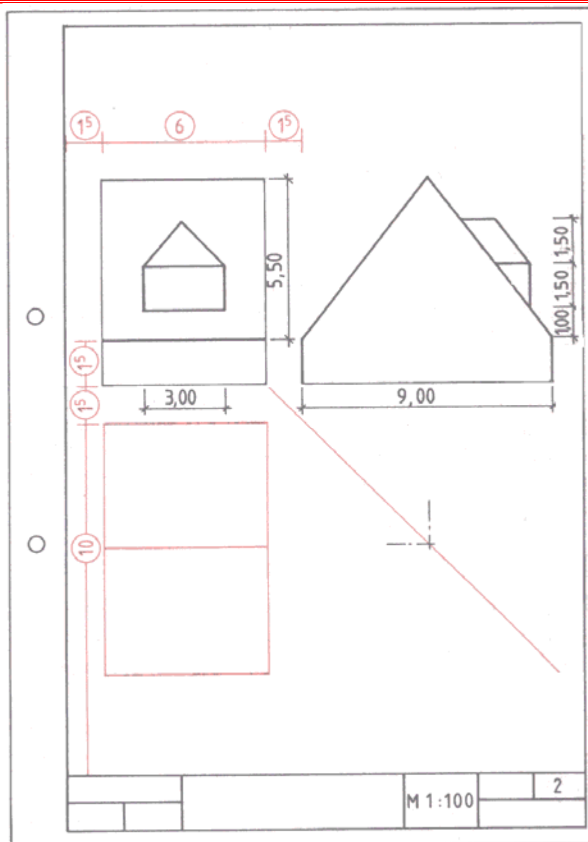

10
2,5
13,5
2,00
7,00
1,50
3,00
60°
8,00
M 1:100
1

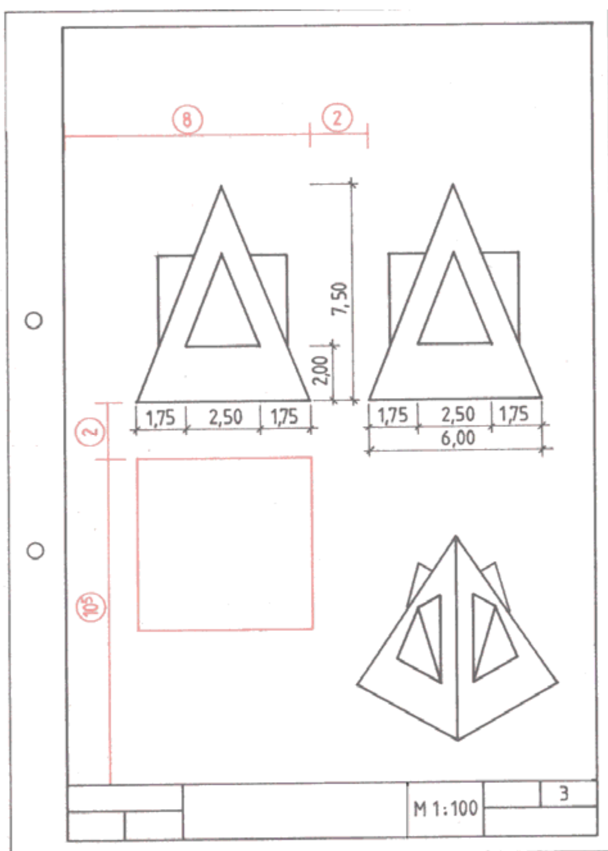

5
6
3
1,50
5,5
1,00
2,00
1,50
4,50
3,00
6,00
M 1:100
2

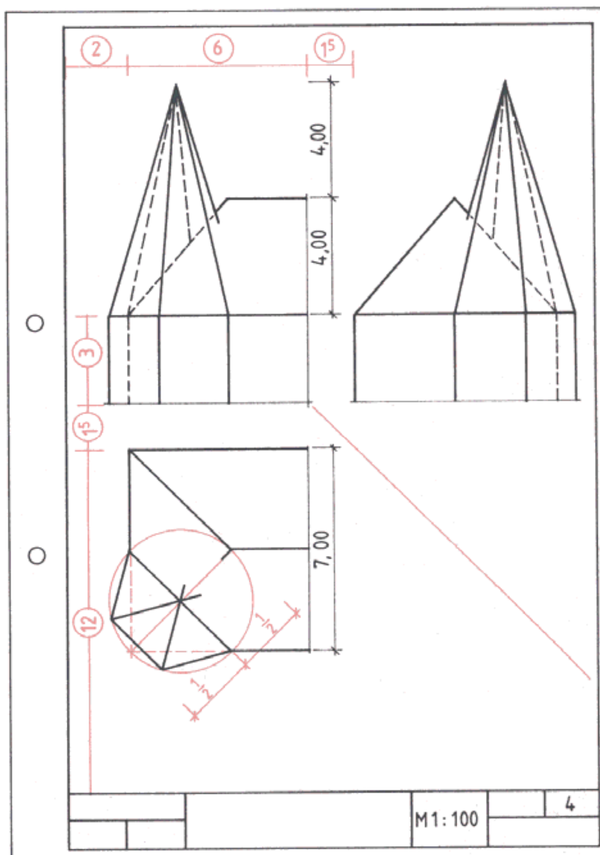

13
1,5
5,00
4,00
2,0
14,00
9,5
3,0
10,00
1,5
2,0
8,00
4,00
M 1:200
3

Tema 6.









Tema 7.

Problema 7. Să se rezolve epura şi intersecțiile de acoperiş din tema 7.

Problema 8. Să se citescă şi apoi să se deseneze secțiunile din triedrele următoare:

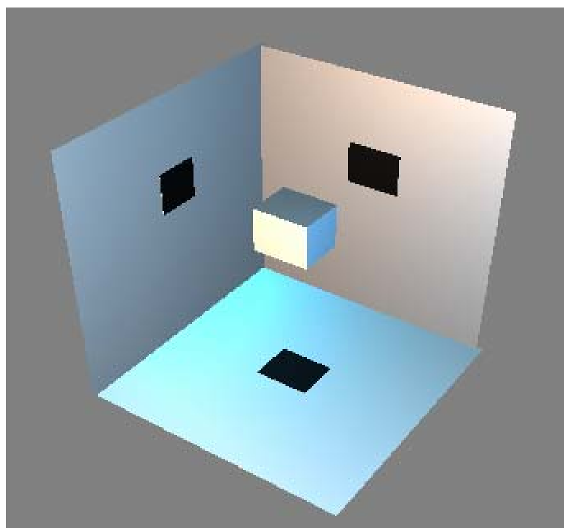


Fig.13.4.

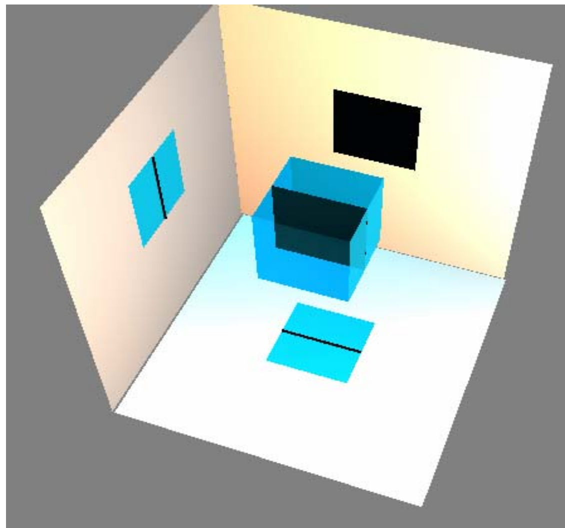


Fig.13.5.

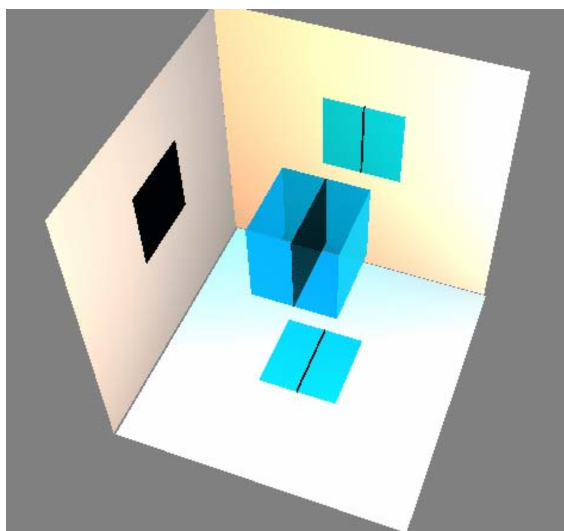


Fig.13.6.

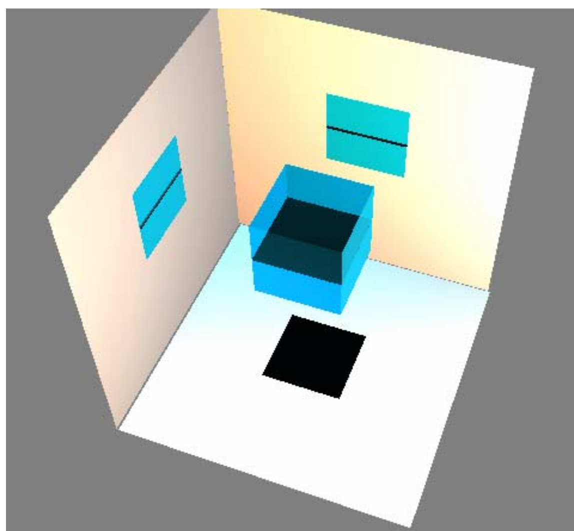


Fig.13.7.

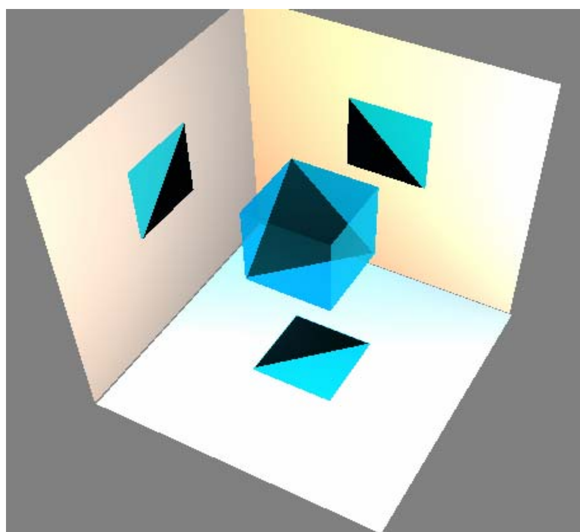


Fig.13.8.

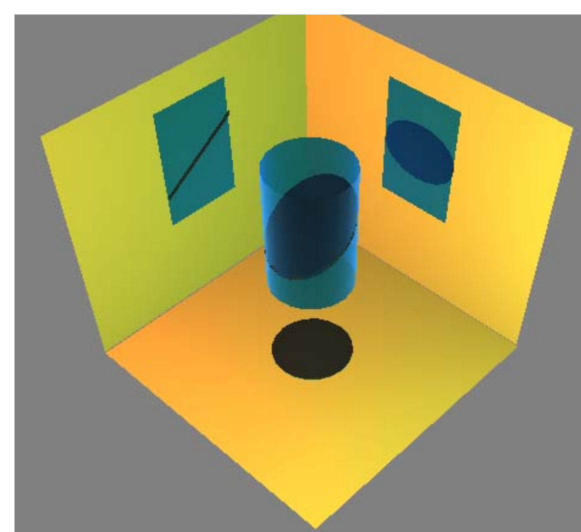


Fig.13.9.

Problema 9.

Să se citescă intersecțiile dintre corpuri rezultate în figurile 13.10 - 13.17.

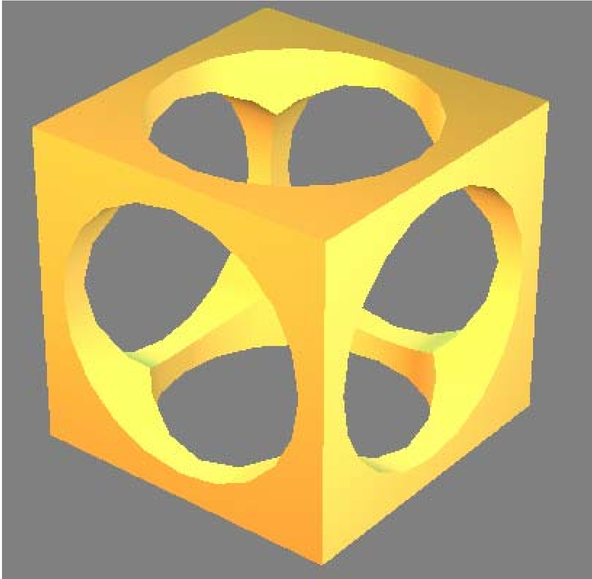


Fig.13.10.

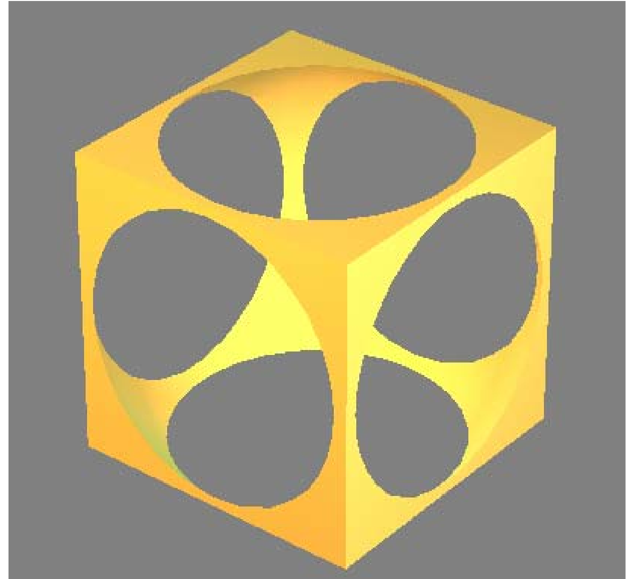


Fig.13.11.



Fig.13.12.

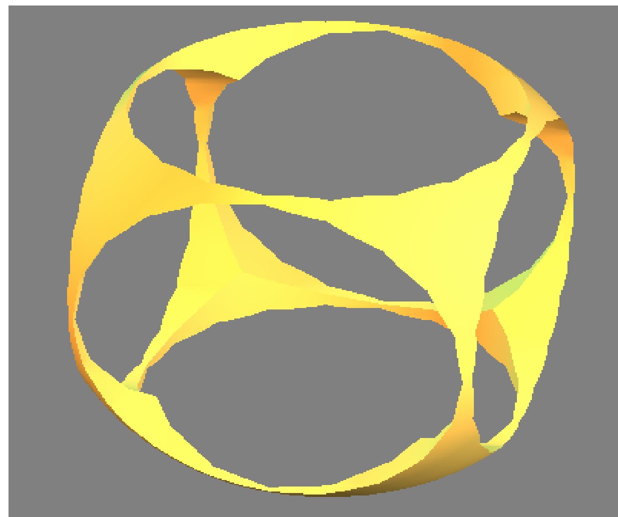


Fig.13.13.

Problema 10.

Să se deseneze un ansamblu axonometric format din corpurile din figura 13.18.

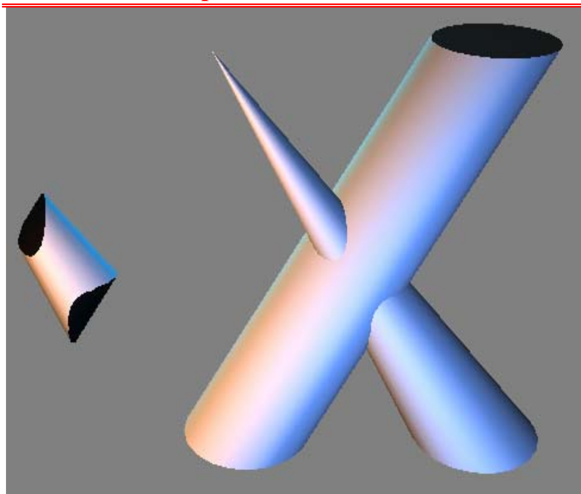


Fig.13.14.

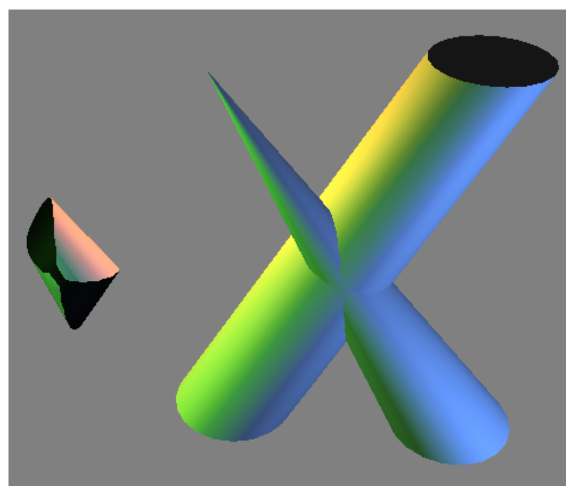


Fig.13.15.

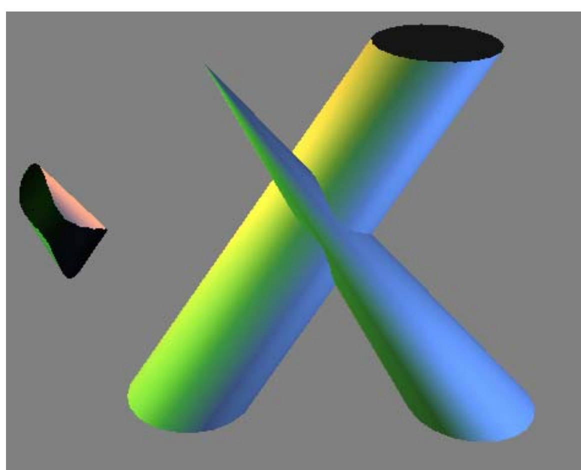


Fig.13.16.

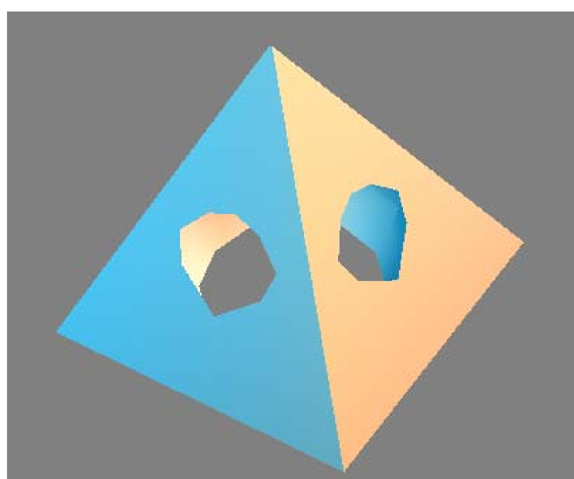


Fig.13.17.

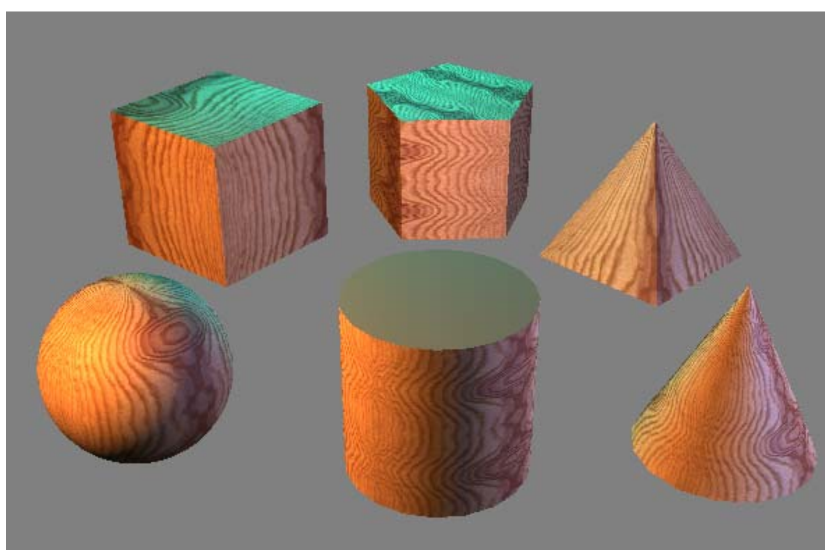
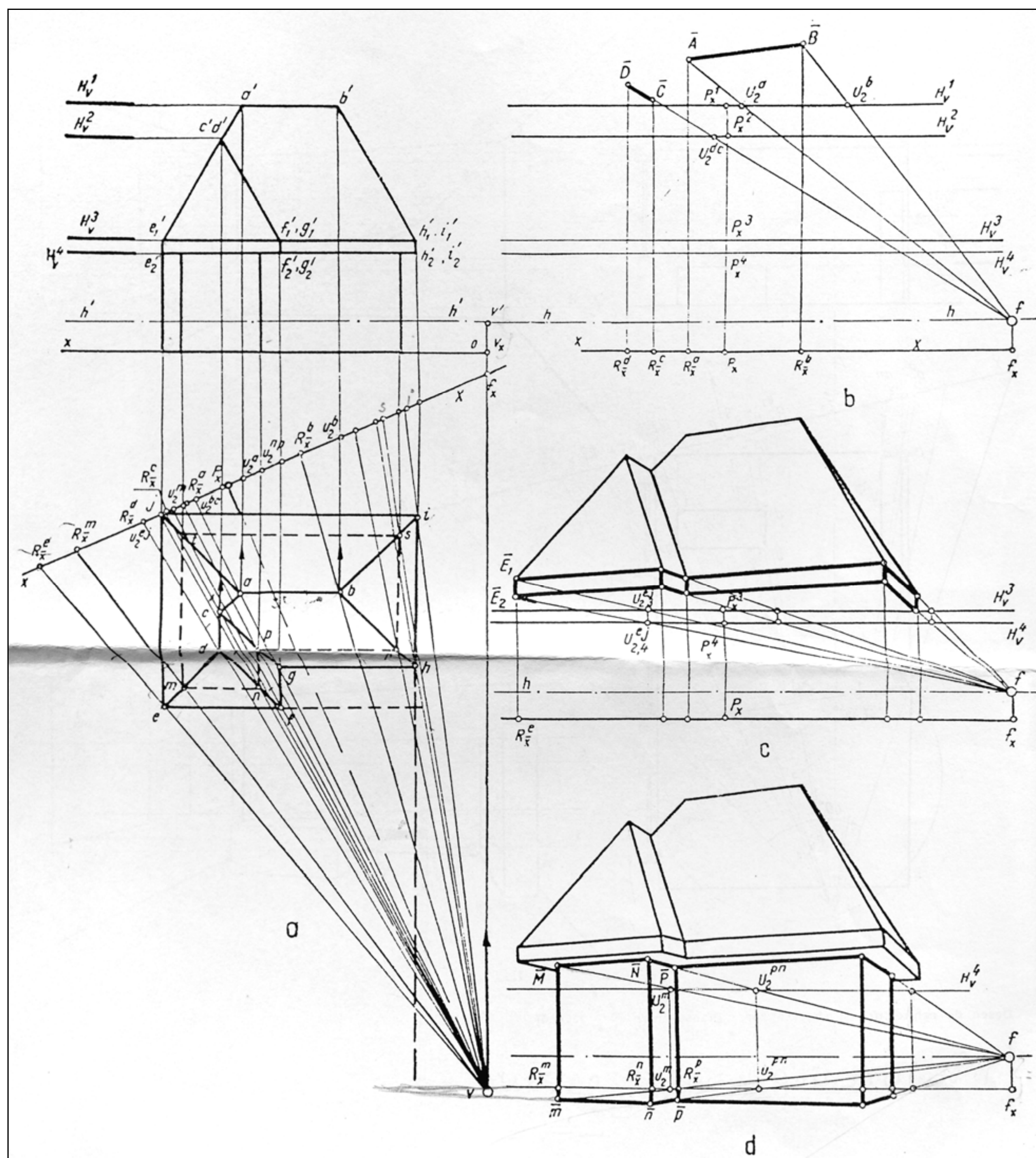


Fig.13.18.

13.9. PERSPECTIVĂ

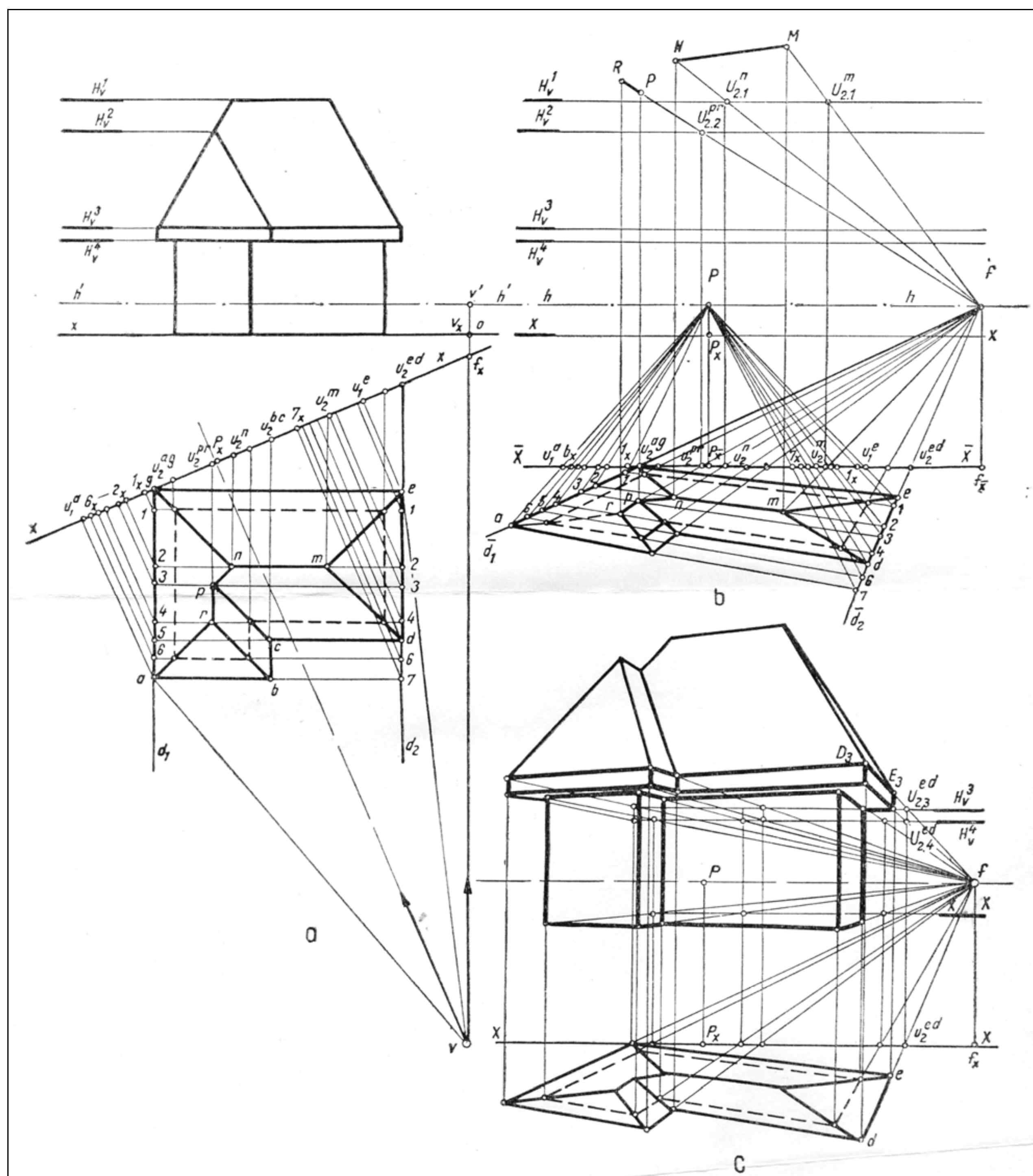
Problema 1.



Problema 2.

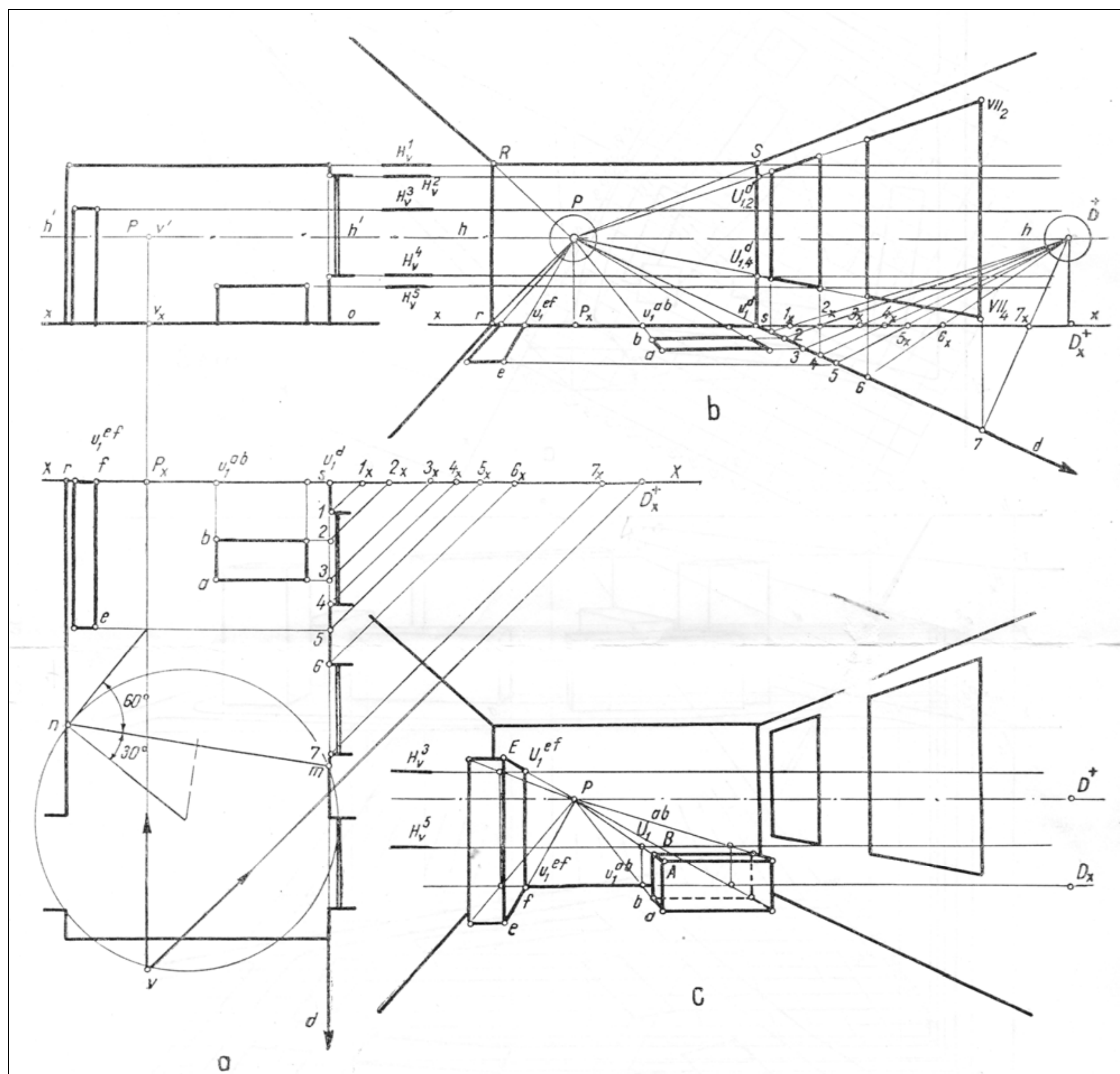
Să se deseneze perspectiva exterioară a clădirii din figura 13.20.

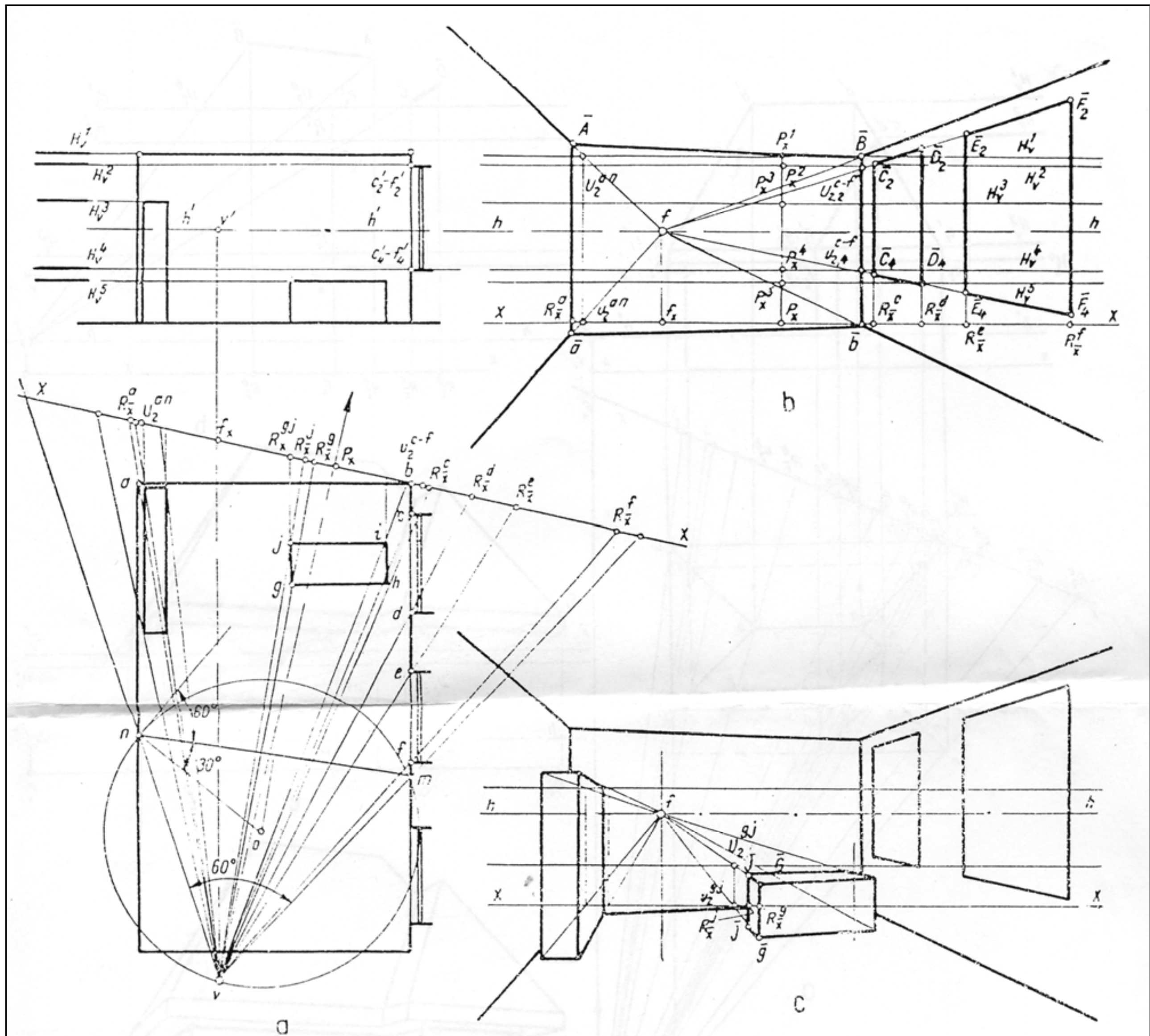
Se recomandă metoda directă, punct cu punct, Pf.



Problema3.

Să se deseneze perspectiva interioară a camerei din figura 13.21. Se foloseşte oricare din metodele de construcție expuse la perspectiva exterioară. Se recomandă metoda directă, punct cu punct, PD.




a
b
c

BIBLIOGRAFIE

1. **BATRAN, B**, ş.a., Fachwissen Bau, Handwerk und Technik, Hamburg, 1991;

2. **DRAGOMIR, V., TEODORESCU, Şt**., *Geometrie descriptivă, umbre, perspective,* EDP, Bucureşti, 1977;

3. **DRĂGAN, D., MÂRZA, C.,** *Geometrie descriptivă – probleme,* Editura U.T. PRES, Cluj-Napoca, 2005;

4. **IANCĂU, V., ZETEA, E.,** *Reprezentări geometrice, îndrumător de lucrări,* Litografiat I.P.C.N., 1980;

5. **GROZA, O.,** *Geometrie descriptivă, teorie şi aplicaţii,* Editura Universităţii din Oradea, 2006;

6. **HULE, V.,** *Geometrie descriptivă şi desen tehnic,* Editura Universităţii din Oradea, 2003;

7. **NOVEANU, L., ORBAN, M.**, *Geometrie descriptivă şi aplicaţii,* Editura UT Cluj-Napoca,1997;

8. **MOCANU, R., TEODORESCU, E., PAPAE, M., PRUNDEANU, D.,** Desen de arhitectură şi sistematizare, EDP Bucureşti 1973;

9. **TĂNĂSESCU, A.,** *Geometrie descriptivă, perspectivă, axonometrie,* EDP, Bucureşti,1975.